# Ableitungen

1. $f(x) = 4\,e^{-3x+1}$ $\qquad f(x) = a\,e^{g(x)}, \quad f'(x) = a\,e^{g(x)} \cdot g'(x)$

2. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ $\qquad (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f(x) = g\big(h(x)\big), \;\; f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

3. $f(x) = \cos(2x+1)$ $\qquad \big(\sin(x)\big)' = \cos(x), \quad \big(\cos(x)\big)' = -\sin(x)$

4. $f(x) = 2^x$ $\qquad e^{\ln a} = a$

5. $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$ $\qquad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

6. $f(x) = (x^3+x)e^{-2x}$

7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

1. $f(x) = 4\,e^{-3x+1}$ $\qquad f'(x) = 4\,e^{-3x+1} \cdot (-3) = -12\,e^{-3x+1}$

2. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

3. $f(x) = \cos(2x+1)$ $\qquad f'(x) = -\sin(2x+1) \cdot 2$

4. $f(x) = 2^x$ $\qquad f(x) = e^{x \cdot \ln 2}, \;\; f'(x) = e^{x \cdot \ln 2} \cdot \ln 2 = 2^x \cdot \ln 2$

5. $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$ $\qquad f'(x) = x(3x+2)\,e^{3x}$

6. $f(x) = (x^3+x)e^{-2x}$ $\qquad f'(x) = (3x^2+1)e^{-2x} - 2(x^3+x)e^{-2x} = e^{-2x}(\;\ldots\;)$

7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\qquad f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

# Wachstum

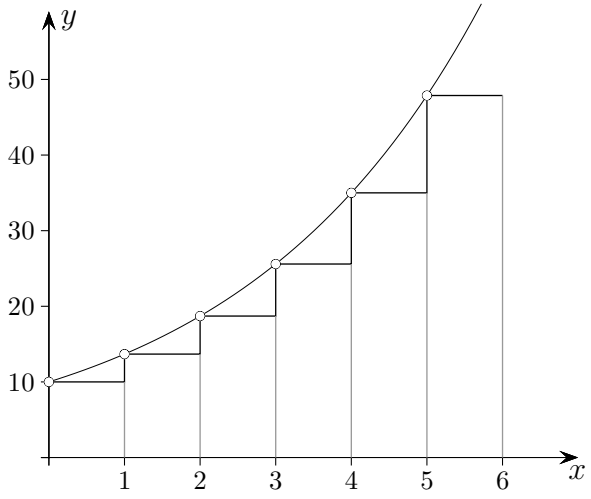
exponentielles Wachstum $f(x) = ae^{kx},\ k > 0$

a) Anfangsbestand 20, Wachstum 4% pro Zeiteinheit, Funktion?

$$\begin{aligned} f(x) &= 20 \cdot 1{,}04^x && f(1) = 20 \cdot 1{,}04 = 20 + \frac{4}{100} \cdot 20,\ \ f(2) = f(1) \cdot 1{,}04 = 20 \cdot 1{,}04^2 \\ &= 20 \cdot e^{x \cdot \ln 1{,}04} && \text{exakte Version der Zinseszinsfunktion} \\ &= 20 \cdot e^{0{,}03922 \cdot x} \\ &= 20 \cdot e^{0{,}04x} && \text{genähert} \end{aligned}$$

b) Anfangsbestand 10, nach 4 Zeiteinheiten beträgt der Bestand 35, Funktion?

$$\begin{aligned} 10 \cdot e^{k \cdot 4} &= 35 \\ e^{k \cdot 4} &= \frac{35}{10} && \mid \ln \\ k \cdot 4 &= \ln 3{,}5 \\ k &\approx 0{,}3132 \\ f(x) &= 10 \cdot e^{0{,}3132x} \end{aligned}$$

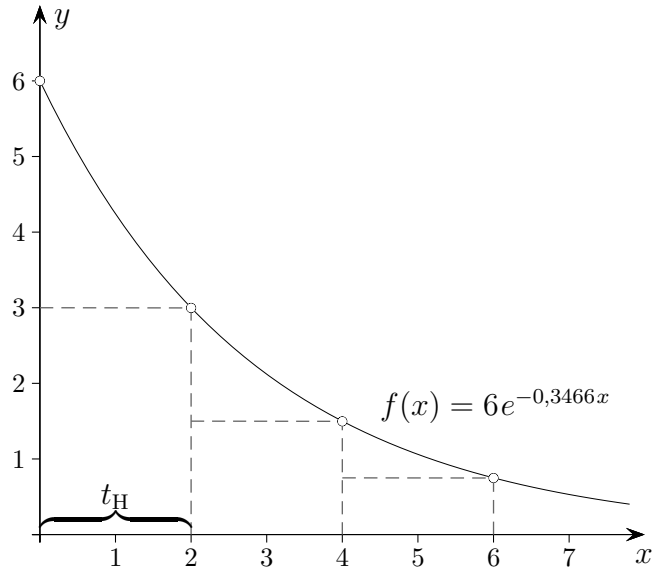



exponentielle Abnahme (Zerfall) $f(x) = ae^{-kx},\ k > 0$

Anfangsbestand 20, Abnahme 4% pro Zeiteinheit, Funktion?

$$\begin{aligned} f(x) &= 20 \cdot 0{,}96^x && f(1) = 20 \cdot 0{,}96 = 20 - \frac{4}{100} \cdot 20,\ \ f(2) = f(1) \cdot 0{,}96 = 20 \cdot 0{,}96^2 \\ &= 20 \cdot e^{x \cdot \ln 0{,}96} && \text{exakt} \\ &= 20 \cdot e^{-0{,}04082 \cdot x} \\ &= 20 \cdot e^{-0{,}04x} && \text{genähert} \end{aligned}$$

Bei der exponentiellen Abnahme wird der Wachstumsprozess von rechts nach links betrachtet, sein Graph also an der $y$-Achse gespiegelt.




Bei der exponentiellen Abnahme ist die Zeitspanne, in der sich ein Bestand halbiert, stets gleich und unabhängig vom Anfangswert, es gilt $1 = 2e^{-k \cdot t_H}$, $t_H = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{k}$ Halbwertszeit.
Entsprechend ist beim exponentiellen Wachstum die Zeitspanne, in der sich ein Bestand verdoppelt, stets gleich und unabhängig vom Anfangswert, es gilt $2 = 1e^{k \cdot t_V}$, $t_V = \frac{\ln 2}{k}$ Verdopplungszeit.

a) Exponentieller Zerfall, Anfangsbestand 6, Halbwertszeit $t_H = 2$ Zeiteinheiten , Funktion?
$f(x) = 6e^{-0,3466x}$

b) Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen von $f(x) = e^{-3x}$ an der Stelle $x = 0$?
$y = -3x + 1$

c) Wie groß ist der Inhalt der Fläche unterhalb des Graphen von $f(x) = e^{2x}$ in den Grenzen von 0 bis 3?

$$\int_0^3 e^{2x}\,dx = \left|\tfrac{1}{2}e^{2x}\right|_0^3 = \tfrac{1}{2}e^6 - \tfrac{1}{2}$$

<u>begrenztes Wachstum (z. B. Erwärmung) $f(x) = G - ae^{-kx}$</u>

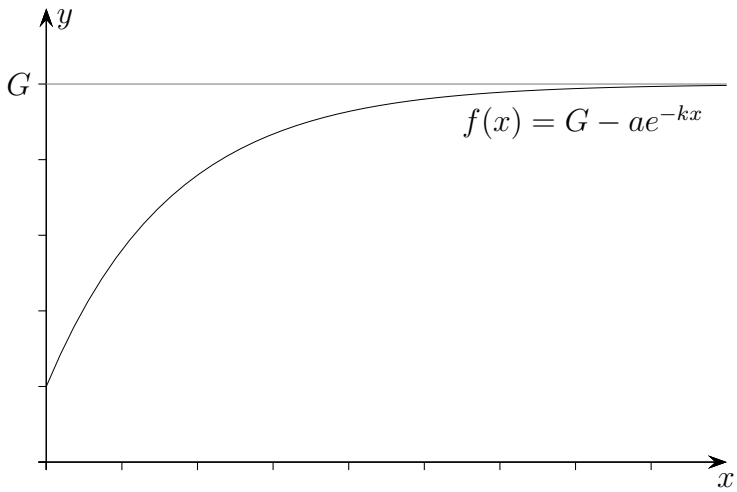
a) Anfangsbestand 8, Grenze $G = 40$,
Abnahme der Differenz Grenze − Bestand um 5 % pro Zeiteinheit, Funktion?

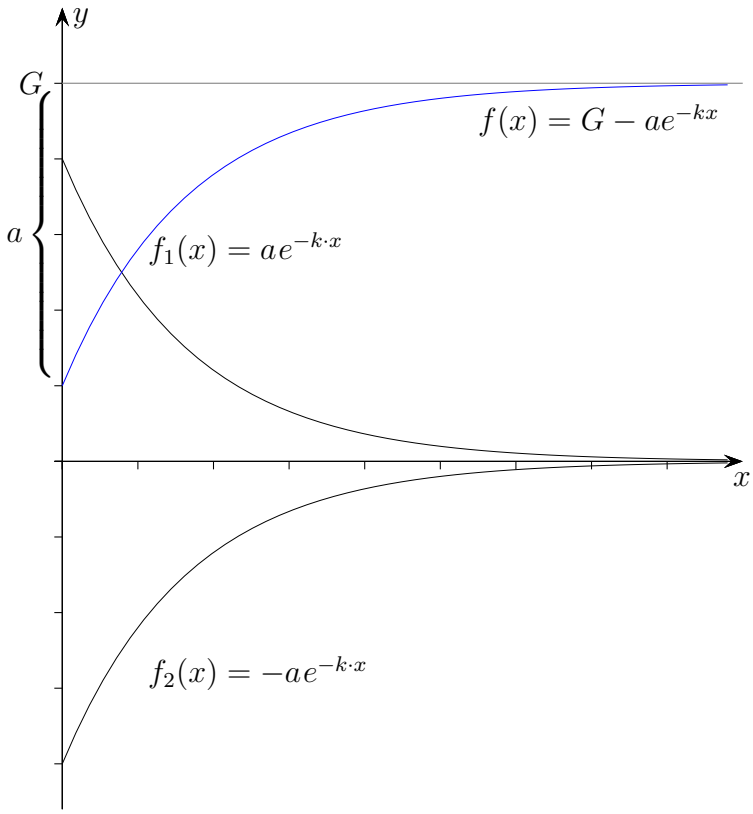
$$\begin{aligned} f(0) &= G - a = 8 \\ a &= 32 \\ f(x) &= 40 - 32 \cdot e^{-0,05 \cdot x} \end{aligned}$$

b) Anfangsbestand 6, $G = 25$, nach 10 Zeiteinheiten beträgt der Bestand 20, Funktion?

$$\begin{aligned} f(x) &= 25 - 19 \cdot e^{-k \cdot x} \\ f(10) &= 25 - 19 \cdot e^{-k \cdot 10} = 20 \\ k &\approx 0{,}1335 \end{aligned}$$

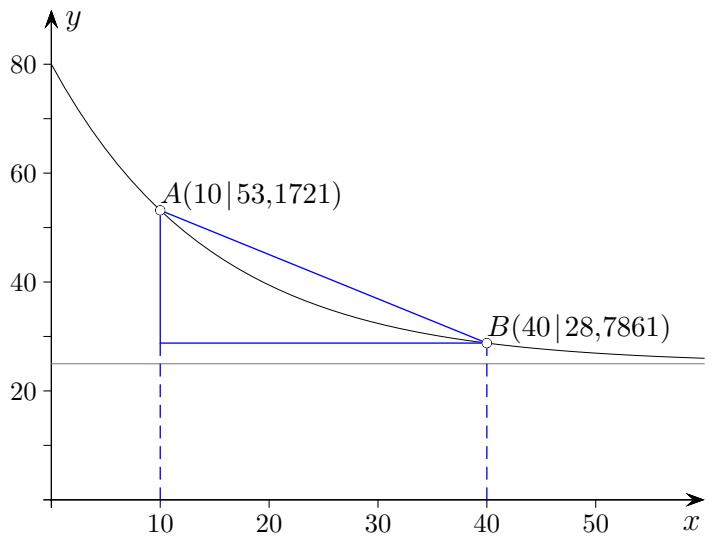
# Begrenztes Wachstum




Aus der Abbildung ist ersichtlich, wie der Funktionsterm des begrenzten Wachstums durch Spiegelung und Verschiebung entsteht.

Abkühlung $\quad f(x) = G + ae^{-kx}, \quad f(x) = 25 + 55 \cdot e^{-0{,}0669\,x}$




Durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate auf dem Intervall $[a; b] = [10; 40]$?

$$\text{Sekantensteigung} \quad m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{28{,}7861 - 53{,}1721}{40 - 10} \approx -0{,}813$$

Statt auf dem Graphen von $A$ nach $B$ (mit unterschiedlichen lokalen Änderungsraten) zu gelangen, kann von $A$ aus mit konstanter, negativer Steigung $m$ (Änderungsrate) $B$ erreicht werden.

# Gleichungen

1. $5e^{-4x} = 20$ $\qquad x = -\dfrac{\ln 2}{2}$

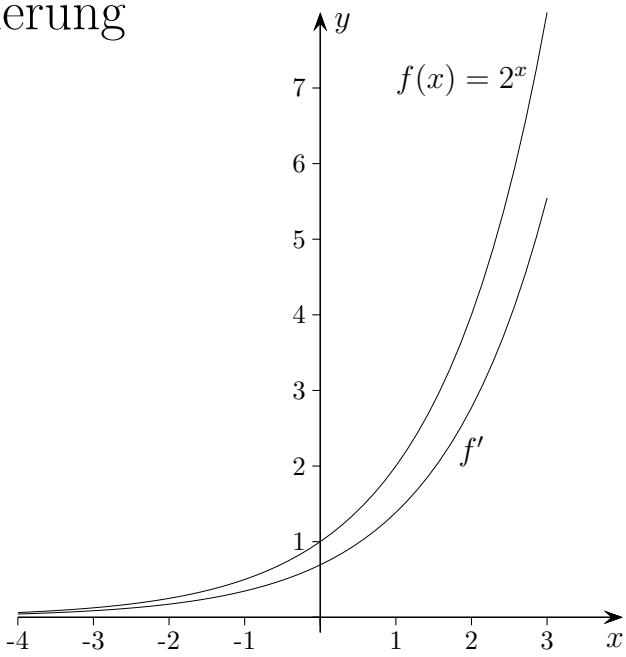
2. $x \cdot e^{-x} = 0$ $\qquad x = 0, \quad e^{ax} > 0, \quad$ Satz vom Nullprodukt

3. $(x^2 - 2x)e^x = 0$ $\qquad x_1 = 0, \;\; x_2 = 2$

4. $(x^2 - 4x - 5)e^{-2x} = 0$ $\qquad x_1 = -1, \;\; x_2 = 5$

5. $\ln x = 2$ $\qquad x = e^2$

# Zur Erinnerung

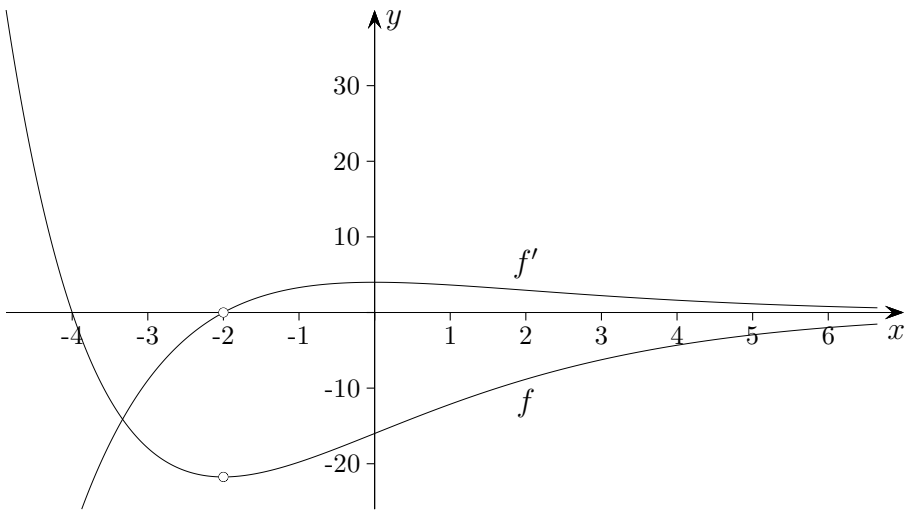



Mit $e$ als Basis stimmt $f'$ mit $f$ überein.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+1)e^{-2x} = 0$ Die $e$-Funktion dominiert.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x^4)e^{0{,}1x} = \infty$

c) Bei der Kurvendiskussion kann für die hinreichende Bedingung für Extrema ein Vorzeichenwechsel von $f'$ untersucht werden. Damit kann $f''$ eingespart werden, falls nicht noch die Wendestellen zu ermitteln sind, z. B.
$f(x) = (-4x-16)e^{-0{,}5x},\ f'(x) = (2x+4)e^{-0{,}5x},\ f'(-2) = 0,$
VZW an der Stelle $x = -2$ von $-$ nach $+$, daher Tiefpunkt von $f$ an der Stelle $x = -2$.



# Funktion $\quad f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

1. <u>Symmetrie</u> liegt nicht vor.

2. <u>Nullstellen:</u>

   Bed.: $f(x) = 0$

   $x = 0$

3. <u>Extrema:</u>

   notw. Bed.: $f'(x) = 0$

   $f'(x) = e^{-x}\,(2x - x^2)$ $\qquad f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$

   $x_1 = 0$ $\qquad f''(0) = 2$ $\qquad$ T( 0 | 0 )

   $x_2 = 2$ $\qquad f''(2) < 0$ $\qquad$ H( 2 | $\frac{4}{e^2}$ )

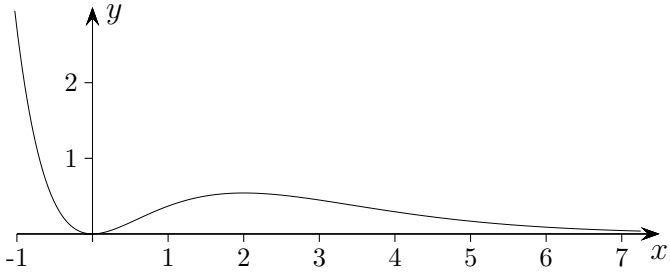
   alternative Begründung

   $y = 2x - x^2 = -x(x-2)$ ist eine nach unten geöffnete Parabel.
   An der Nullstelle $x = 0$ liegt für die Parabel und damit für $f'$ ein VZW von $-$ nach $+$ vor, $f$ hat hier einen Tiefpunkt.
   An der Nullstelle $x = 2$ ist ein VZW von $+$ nach $-$, daher hat $f$ an dieser Stelle einen Hochpunkt.

4. <u>Verhalten von $f$</u> für $x \longrightarrow \infty$ und $x \longrightarrow -\infty$ (Globalverlauf)

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$




5. <u>Wendestellen:</u>

   notw. Bed.: $f''(x) = 0$

   $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2}$

   Begründung für die Existenz der Wendepunkte:
   Zwischen Tief- und Hochpunkt muss ein Wendepunkt liegen.
   Ein Weiterer liegt wegen des Hochpunkts und dem Verhalten von $f$ für $x \longrightarrow \infty$ vor.

6. <u>Gleichung der Tangente an der Stelle $x = 1$</u> $\qquad y = \frac{1}{e}x$

Skizziere den Graphen von

a) $f(x) = e^{-0,5x} + 1$

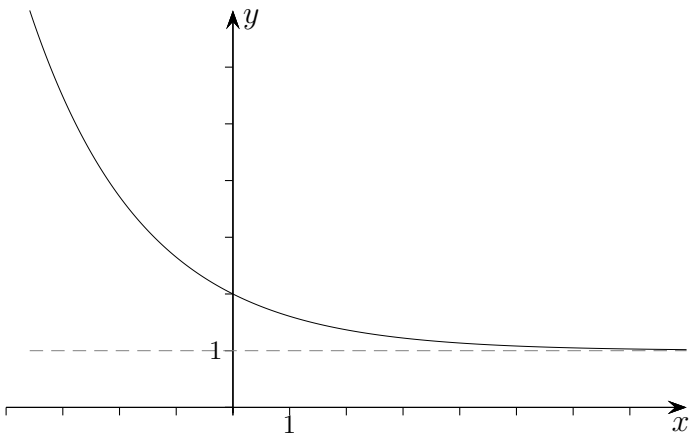
b) $f(x) = 5 - e^{-0,5x}$

c) $f(x) = e^{0,5x} - 1$

d) $f(x) = e^{0,5(x-3)} - 1$

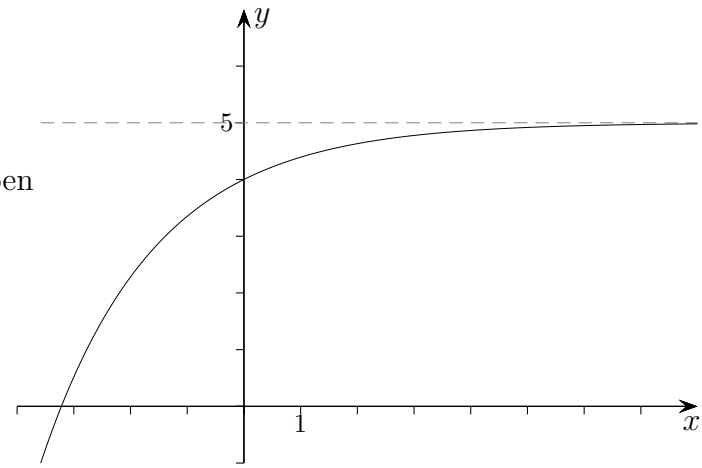
a) $f(x) = e^{-0,5x} + 1$

$f(x) = e^{-0,5x}$, Graph skizzieren und
in $y$-Achsenrichtung um 1 verschieben



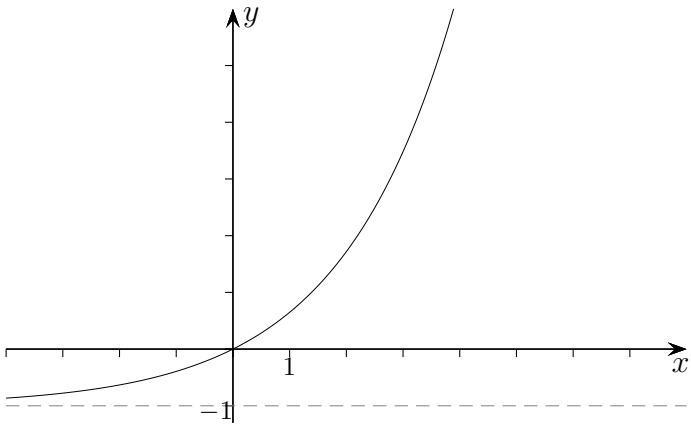

b) $f(x) = 5 - e^{-0,5x}$

$f(x) = e^{-0,5x}$, Graph skizzieren,
an der $x$-Achse spiegeln
und in $y$-Achsenrichtung um 5 verschieben



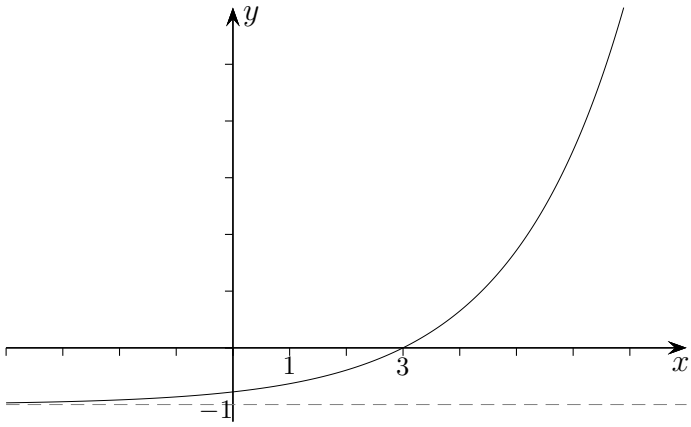

c) $f(x) = e^{0,5x} - 1$

$f(x) = e^{0,5x}$, Graph skizzieren und
in $y$-Achsenrichtung um -1 verschieben




d) $f(x) = e^{0,5(x-3)} - 1$

$f(x) = e^{0,5x} - 1$, Graph skizzieren und
in $x$-Achsenrichtung um 3 verschieben



1. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = e^x + 1$.

   a) Bestimmen Sie: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

   b) Der Graph der Funktion $g$ kann aus dem Graphen von $f$ durch Spiegeln an der $y$-Achse und Verschieben um 3 in positive $y$-Richtung erzeugt werden. Geben Sie einen Funktionsterm von $g$ an.

2. Betrachtet wird die Funktion $f(x) = x \cdot e^x,\ x \in \mathbb{R}$.

   a) Geben Sie die Nullstelle von $f$ an.

   b) Weisen Sie nach, dass die Funktion $F(x) = (x-1) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von $f$ ist.

   c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von $f$, der $x$-Achse und den Geraden zu $x = 0$ und $x = 1$ eingeschlossen wird.

3. Zu Beginn einer Beobachtung befinden sich 20 Bakterien in einer Bakterienkultur. Diese Bakterien vermehren sich stündlich um 15 %.

   a) Welche $e$-Funktion beschreibt dieses Wachstum?

   b) Ermitteln Sie die Verdopplungszeit.

   c) Nach wie vielen Stunden sind 2000 Bakterien vorhanden?

4. Bei einem radioaktiven Stoff zerfällt jedes Jahr 10 % der noch vorhandenen Masse.

   a) Berechnen Sie (in Prozent), wie viel nach 10 Jahren noch vorhanden ist.

   b) Welche $e$-Funktion beschreibt diesen Zerfall?

   c) Ermitteln Sie die Halbwertszeit.

   d) Wieviel Prozent der jeweils vorhandenen Masse zerfällt pro Monat?

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = e^x + 1$.

   a) Bestimmen Sie: $\int_0^1 f(x)\,dx$ $\qquad \int_0^1 f(x)\,dx = \left[e^x + x\right]_0^1 = e$

   b) Der Graph der Funktion $g$ kann aus dem Graphen von $f$ durch Spiegeln an der $y$-Achse und Verschieben um 3 in positive $y$-Richtung erzeugt werden. Geben Sie einen Funktionsterm von $g$ an. $\qquad e^{-x} + 4$

2. Betrachtet wird die Funktion $f(x) = x \cdot e^x,\ x \in \mathbb{R}$.

   a) Geben Sie die Nullstelle von $f$ an. $\qquad$ Die Nullstelle ist 0.

   b) Weisen Sie nach, dass die Funktion $F(x) = (x-1) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von $f$ ist.

   $$F'(x) = e^x + (x-1) \cdot e^x = x \cdot e^x = f(x)$$

   Damit ist $F$ eine Stammfunktion von $f$.

   c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von $f$, der $x$-Achse und den Geraden zu $x = 0$ und $x = 1$ eingeschlossen wird.

   $$\int_0^1 f(x)\,dx = \left[F(1) - F(0)\right]_0^1 = 0 - (-1) = 1$$

3. Zu Beginn einer Beobachtung befinden sich 20 Bakterien in einer Bakterienkultur. Diese Bakterien vermehren sich stündlich um $p = 15\,\%$.

   a) Welche $e$-Funktion beschreibt dieses Wachstum?

   $$f(t) = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t = 20 \cdot 1{,}15^t = 20 \cdot e^{\ln 1{,}15 \cdot t} \approx 20 \cdot e^{0{,}1398 \cdot t}$$

   b) Ermitteln Sie die Verdopplungszeit. $\qquad 2 = 1 \cdot e^{\ln 1{,}15 \cdot t_V},\ t_V \approx 4{,}96$ [h]

   c) Nach wie vielen Stunden sind 2000 Bakterien vorhanden? $\qquad$ 32,9 h

4. Bei einem radioaktiven Stoff zerfällt jedes Jahr 10 % der noch vorhandenen Masse.

   a) Berechnen Sie (in Prozent), wie viel nach 10 Jahren noch vorhanden ist.

   $$f(10) = a \cdot 0{,}9^{10} \approx a \cdot 0{,}349$$

   Nach 10 Jahren sind also etwa 34,9 % des ursprünglichen Materials vorhanden.

   b) Welche $e$-Funktion beschreibt diesen Zerfall?

   $$f(t) = a\left(1 - \frac{p}{100}\right)^t = a \cdot 0{,}9^t = a \cdot e^{\ln 0{,}9 \cdot t} \approx a \cdot e^{-0{,}1054 \cdot t}$$

   c) Ermitteln Sie die Halbwertszeit. $\qquad 1 = 2 \cdot e^{\ln 1{,}15 \cdot t_H},\ t_H \approx 6{,}6$ [Jahre]

   d) Wieviel Prozent der jeweils vorhandenen Masse zerfällt pro Monat?

   $$1 - e^{\ln(0{,}9) \cdot 1/12} \approx 0{,}87\,\%$$