1. Aufgabe: Differentialrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 16x;\ x \in \mathbb{R}$.

Ihr Graph ist G_f.

a) Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie bezüglich der y-Achse beziehungsweise zum Koordinatenursprung. Beschreiben Sie das Verhalten der Funktion im Unendlichen.

b) An der Stelle $x_{01} = 8$ schneidet G_f die x-Achse. Ermitteln Sie rechnerisch alle weiteren Nullstellen der Funktion f.

c) Zeigen Sie, dass G_f über die Extremstellen $x_1 = 4$, $x_2 = 4 - \sqrt{8}$ und $x_3 = 4 + \sqrt{8}$ verfügt.
Berechnen Sie die Koordinaten der drei Extrempunkte von G_f und bestimmen Sie die Art der Extrema.
Beschreiben Sie das Monotonieverhalten von G_f unter Angabe der Monotonieintervalle.

d) Ermitteln Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_f.

e) Zeichnen Sie G_f in ein kartesisches Koordinatensystem im Intervall $0 \le x \le 8$.

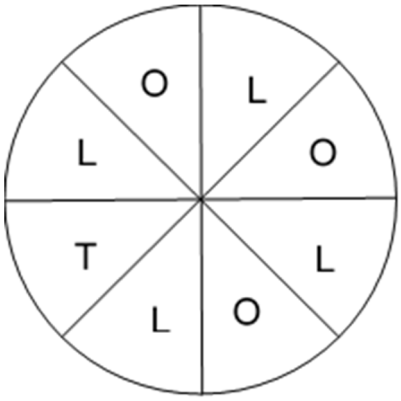
f) Die Gerade t mit $y = 4x - 14$ hat mit G_f den gemeinsamen Punkt P(2|–6).
Zeigen Sie, dass die Gerade t eine Tangente an G_f im Punkt P ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von t.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	4	4	11	5	3	3	30

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
1a)	Der Graph ist weder zur y-Achse noch zum Koordinatenursprung symmetrisch, da die Funktion weder gerade noch ungerade ist. Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$	2 2
1b)	$0=x\left(\frac{1}{8}x^3-2x^2+10x-16\right)$; $x_{02}=0$ $\left(\frac{1}{8}x^3-2x^2+10x-16\right):(x-8)=\frac{1}{8}x^2-x+2$ $0=\frac{1}{8}x^2-x+2$; $x_{03}=4$	4
1c)	$f'(x)=\frac{1}{2}x^3-6x^2+20x-16$; $f''(x)=\frac{3}{2}x^2-12x+20$ $f'(4)=0$; $f''(4)=-4<0$; $f(4)=0$; $H(4\mid 0)$ $f'(4-\sqrt{8})=0$; $f''(4-\sqrt{8})=8>0$; $f(4-\sqrt{8})=-8$; $T_1(1{,}17\mid -8)$ $f'(4+\sqrt{8})=0$; $f''(4+\sqrt{8})=8>0$; $f(4+\sqrt{8})=-8$; $T_2(6{,}83\mid -8)$ Monotonieverhalten: $-\infty < x < 1{,}17$: streng monoton fallend $1{,}17 < x < 4$: streng monoton steigend $4 < x < 6{,}83$: streng monoton fallend $6{,}83 < x < \infty$: streng monoton steigend	2 5 4
1d)	$f''(x)=0=\frac{3}{2}x^2-12x+20$; $f'''(x)=3x-12$ $x_{W1}\approx 5{,}63$; $f'''(5{,}63)=4{,}89\neq 0$; $f(5{,}63)\approx -4{,}43$; $W_1(5{,}63\mid -4{,}43)$ $x_{W2}\approx 2{,}37$; $f'''(2{,}37)=-4{,}89\neq 0$; $f(2{,}37)\approx -4{,}43$; $W_2(2{,}37\mid -4{,}43)$	1 4

1e)	Graph G_f	3
1f)	$P(2\,\vert\,-6): m_t = f'(2) = 4$ Die Gerade t und G_f haben im Punkt P den gleichen Anstieg, also ist t eine Tangente. Achsenschnittpunkte: $S_y(0\vert-14)$; aus $4x - 14 = 0$ folgt $S_x(3{,}5\vert0)$	1 2
	Summe	30

2. Aufgabe: Stochastik



Ein Glücksrad hat acht gleich große Sektoren mit jeweils einem Buchstaben, wobei einmal „T“, dreimal „O“ und viermal „L“ vorhanden sind.
Das „T“ entspricht einem Hauptgewinn und das „O“ einem Kleingewinn.

a) Das Glücksrad wird **zweimal** gedreht. Zeichnen Sie für dieses Zufallsexperiment ein vollständiges Baumdiagramm. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Unter den gedrehten Sektoren ist mindestens ein Hauptgewinn.

B: Von den zwei gedrehten Sektoren ist höchstens ein beliebiger Gewinn dabei.

b) Das Glücksrad wird **dreimal** gedreht. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse

C: Die Buchstaben des Wortes „LOT“ werden in genau dieser Reihenfolge erdreht.

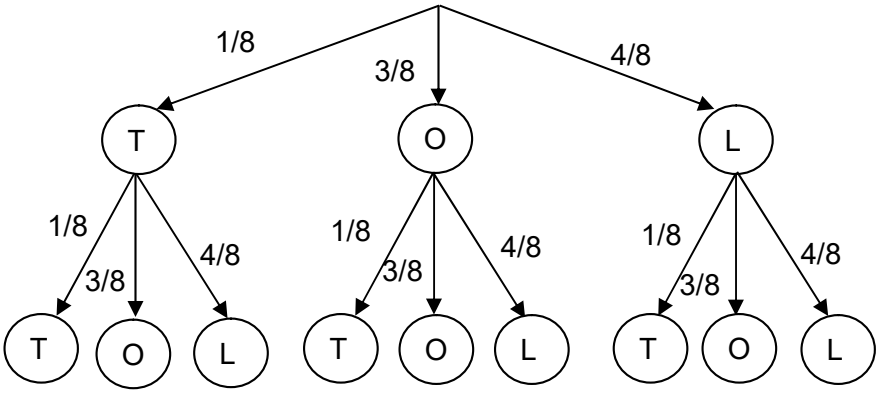
D: Es lässt sich aus den erdrehten Sektoren das Wort „LOT“ bilden.

c) Jeder Hauptgewinn hat einen Wert von 10 € und jeder Kleingewinn einen Wert von 2 €.
Man darf für 2,50 € **einmal** drehen und der Gewinn wird sofort ausgezahlt.
Bestimmen Sie rechnerisch, ob sich das Spiel auf lange Sicht eher für den Betreiber oder für den Spieler lohnt.
Auf welchen Wert müsste man den Kleingewinn ändern, damit das Spiel fair wird?

d) Bestimmen Sie rechnerisch, wie viele unterschiedliche Warteschlangen sich bilden lassen, wenn sechs Personen das Glücksrad ausprobieren wollen.

e) Ermitteln Sie, wie viele Möglichkeiten es für sechs Personen gibt, auf den vorhandenen acht verschiedenen Wartestühlen Platz zu nehmen.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	6	4	6	2	2	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
2a)		2
	$P(A) = \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{15}{64} \approx 0{,}23$ Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Hauptgewinn beträgt rund 23 %.	2
	$P(B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$ Die Wahrscheinlichkeit für höchstens einen Gewinn beträgt 75 %.	2
2b)	$P(C) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{128} \approx 0{,}02$ Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 2 %, dass das Wort „LOT“ in genau dieser Reihenfolge entsteht.	2
	$P(D) = 6 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{8} = \frac{9}{64} \approx 0{,}14$ Die Wahrscheinlichkeit zur Bildung des Wortes „LOT“ beträgt rund 14 % .	2
2c)	$\frac{1}{8} \cdot 10\,€ + \frac{3}{8} \cdot 2\,€ + \frac{4}{8} \cdot 0\,€ = 2{,}00\,€$ $\qquad$ 2,00 € < 2,50 € Es lohnt sich für den Betreiber.	3
	$\frac{1}{8} \cdot 10\,€ + \frac{3}{8} \cdot K + \frac{4}{8} \cdot 0\,€ = 2{,}50\,€$ $K = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$ Der Kleingewinn müsste auf 3,33 € geändert werden.	3

2d)	Permutation ohne Wiederholung: n! = 6! = 720 Es gibt 720 Möglichkeiten beim Anstellen an das Glücksrad.	2
2e)	Variation ohne Wiederholung: $V_8^6 = \frac{8!}{(8-6)!} = 20160$ Es gibt 20160 Möglichkeiten, dass sich die 6 Personen auf die 8 Stühle setzen.	2
	Summe	20

3. Aufgabe: Analytische Geometrie

Bildquelle: Karl-Heinz Liebisch / pixelio.de

Ein neues Skigebiet wird geplant. Die Pisten und Wege im betrachteten Abschnitt werden vereinfacht als Geraden und alle Objekte als Punkte aufgefasst.
Eine Längeneinheit entspricht dabei 100 m.

Eine Piste kann durch die Gerade g mit folgender Parametergleichung beschrieben werden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}.$$

a) Zwei Schneekanonen sollen an wichtigen Abschnitten beim Beschneien helfen. Sie befinden sich in den Punkten P(14|3|16) und Q(12|5|15,5).
Überprüfen Sie rechnerisch für jede Schneekanone, ob sie auf oder neben der Piste g platziert ist.

b) Im Punkt K(10|8|18,5) ist eine Kamera fest installiert, die den kompletten Bereich zwischen den Schneekanonen in den Punkten P und Q durch Schwenken erfassen soll.
Ermitteln Sie den Schwenkwinkel $\sphericalangle PKQ$.

Eine zweite Piste h wird geplant und soll durch die Punkte A(24|–9,5|17) und B(22|–6,5|15) verlaufen.

c) Geben Sie eine Parametergleichung der zugehörigen Gerade h an.
Berechnen Sie die fehlenden Koordinaten des Punktes C(x|y|11) der Piste h.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts beider Pisten g und h.

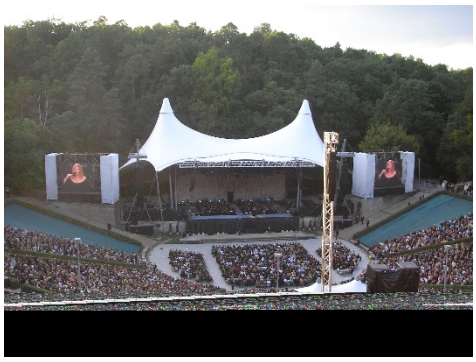
e) Die Piste h soll zwischen den Punkten A und D(16|2,5|9) als Nachtpiste ausgebaut und dafür auf einer Seite mit Lampen bestückt werden, die jeweils einen Radius von 25 m ausleuchten können. Begründen Sie, wie viele solcher Lampen mindestens notwendig sind, um die bestückte Pistenseite auf der gesamten Länge auszuleuchten.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	4	4	4	4	4	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
3a)	P: $\begin{pmatrix}14\\3\\16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\10\\18\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $\rightarrow r=3{,}5$ $\rightarrow r=3{,}5$ $\rightarrow r=2\neq 3{,}5$ → Schneekanone P liegt nicht auf g. Q: $\begin{pmatrix}12\\5\\15{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\10\\18\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ gilt für r = 2,5 in jeder Zeile → Schneekanone Q liegt auf g	2 2
3b)	$\left\lvert\overrightarrow{KP}\right\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}14-10\\3-8\\16-18{,}5\end{pmatrix}\right\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}4\\-5\\-2{,}5\end{pmatrix}\right\rvert=\sqrt{4^2+(-5)^2+(-2{,}5)^2}=\sqrt{47{,}25}$ $\left\lvert\overrightarrow{KQ}\right\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}12-10\\5-8\\15{,}5-18{,}5\end{pmatrix}\right\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix}\right\rvert=\sqrt{2^2+(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{22}$ $\overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{KQ}=\begin{pmatrix}4\\-5\\-2{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix}=8+15+7{,}5=30{,}5$ $\cos\alpha=\frac{30{,}5}{\sqrt{47{,}25}\cdot\sqrt{22}}\approx 0{,}946 \quad \alpha\approx 18{,}92°$	4
3c)	h: $\vec{x}=\vec{A}+s\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}24\\-9{,}5\\17\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}$; $r\in\mathbb{R}$ $\begin{pmatrix}x\\y\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\-9{,}5\\17\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}$ aus 11 = 17 – 2s folgt s = 3 C(18|–0,5|11)	2 2

3d)	g = h $\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -9{,}5 \\ 17 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ r = 6 und s = 2,5 S(19|–2|12)	4
3e)	Pistenlänge: $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\| \begin{pmatrix} 16-24 \\ 2{,}5+9{,}5 \\ 9-17 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-8)^2 + 12^2 + (-8)^2} \approx 16{,}49\,\text{LE} = 1649\,\text{m}$ Der Lampenradius von 25 m ergibt für jede Lampe einen beleuchteten Pistenabschnitt von 50 m. 1649 m : 50 m ≈ 33 Es werden mindestens 33 solcher Lampen benötigt.	4
	Summe	20

3. Aufgabe: Zahlenfolgen



Bildquelle: By Gryffindor (Own work) [Public domain], via Wikimedia Commons

Ähnlich zur Berliner Waldbühne (Foto) wird ein neuer Veranstaltungsort geplant.
Die Sitzreihen sind mit 1 beginnend von unten nach oben durchnummeriert und verbreitern sich fortlaufend. Für die Anzahl der Sitzplätze a_n in der Reihe n gilt folgende Bildungsvorschrift einer Zahlenfolge:

$$a_n = 114 + 6n$$

a) Begründen Sie, dass es sich bei a_n um eine arithmetische Zahlenfolge handelt und geben Sie die Anzahl der Sitzplätze in der ersten und zehnten Reihe an.
Ermitteln Sie den Unterschied in der Sitzanzahl zwischen der 15. und der 21. Reihe.
Berechnen Sie, in welcher Reihe erstmals mindestens 300 Personen Platz finden.

Die vordersten Zuschauer sitzen 5 m von den Lautsprechern entfernt. Zum Schutz des Gehörs der Zuschauer darf der maximale Schalldruckpegel 99 Dezibel (Einheit für den Schalldruckpegel) nicht überschreiten. Er nimmt mit der Entfernung von den Lautsprechern ab. Die folgende Tabelle verdeutlicht das:

Nummer des Messpunktes	**n**	1	2	3	4	…
Abstand von den Lautsprechern in Metern	$\mathbf{b_n}$	5	10	20	40	…
Schalldruckpegel in Dezibel	$\mathbf{c_n}$	99	93	87	81	…

b) Entscheiden Sie anhand der Tabellenwerte jeweils für (b_n) und (c_n), ob es sich um eine arithmetische oder geometrische Zahlenfolge handelt und geben Sie die Bildungsvorschriften an.

c) Ermitteln Sie, ab welchem Messpunkt erstmals ein Schalldruckpegel von 40 Dezibel (Zimmerlautstärke) unterschritten wird und berechnen Sie die zugehörige Entfernung von den Lautsprechern.

Für den geplanten Verkauf der Eintrittskarten wird ein Rabattsystem geprüft. Beim Kauf mehrerer Karten wird jede weitere etwas günstiger. Für den Preis (p_n) der Karten gilt:
$p_n = \frac{22n + 66}{n + 1}$, wobei n die Nummer der gekauften Karte ist.

d) Ermitteln Sie rechnerisch den kleinsten und den größten Kartenpreis, der sich auf Grund der Zahlenfolge ergeben könnte.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	7	6	3	4	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
3a)	Begründung: Die Differenz benachbarter Folgenglieder beträgt stets 6 und ist damit konstant. (alternativ Angabe der expliziten Bildungsvorschrift der arithm. ZF)	1
	$a_1 = 120$; $a_{10} = 174$	2
	$a_{21} - a_{15} = 114 + 6 \cdot 21 - (114 + 6 \cdot 15) = 36$ Der Unterschied beträgt 36 Sitze.	2
	$300 = 114 + 6n$ $31 = n$ 300 Personen finden erstmals in der 31. Reihe Platz.	2
3b)	$\frac{10}{5} = \frac{20}{10} = \frac{40}{20} = 2$ Konstanter Quotient, d.h. geometrische ZF $b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$	3
	$93 - 99 = 87 - 93 = 81 - 87 = -6$ Konstante Differenz, d.h. arithm. ZF $c_n = 99 + (n-1) \cdot (-6)$	3
3c)	$40 = 99 + (n-1) \cdot (-6)$ $n \approx 10{,}83$ Ab dem 11. Messpunkt werden 40 Dezibel unterschritten.	2
	$b_{11} = 5 \cdot 2^{11-1} = 5120$ Dieser Messpunkt ist 5,12 km von den Lautsprechern entfernt.	1
3d)	$p_1 = \frac{22 \cdot 1 + 66}{1 + 1} = 44$ Der höchste Kartenpreis beträgt 44 €.	2
	$\lim\limits_{n \to \infty} p_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{22 + \frac{66}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \right) = 22$ Der kleinste Kartenpreis wäre 22 €.	2
	Summe	20