

**Abschlussprüfung Fachoberschule 2011  
Mathematik**

**Aufgabenvorschlag A**

**1**

**/40**

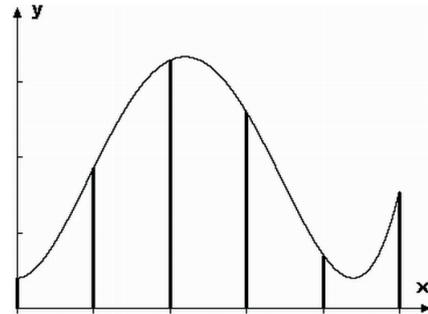
Das erste Teilstück einer Achterbahn ruht auf sechs senkrechten Stützen, die in Abständen von 5 m aufgestellt sind (siehe Abb.1). Es lässt sich im Koordinatensystem durch die Funktionsgleichung

$$f(x) = 0,001x^4 - 0,044x^3 + 0,484x^2 + 2$$

beschreiben. Dabei ist  $f(x)$  die Höhe über dem Erdboden. Der Startpunkt liegt bei  $x = 0$ , der Endpunkt bei  $x = 25$ .

1 Längeneinheit  $\hat{=}$  1 m.

Abb.1 (erstes Teilstück der Achterbahn)



- 1.1** Berechnen Sie die Höhen der Stützen und listen Sie diese in einer Tabelle auf. **/6**
- 1.2** Berechnen Sie den maximalen Höhenunterschied in diesem Teilstück der Achterbahn. **/15**
- 1.3** Berechnen Sie die beiden Punkte dieses Teilstücks der Achterbahn, in denen es am steilsten bergauf bzw. bergab geht und geben Sie jeweils die Steigung an. Beachten Sie zur Steilheit auch die Zeichnung. **/15**
- 1.4** Versehen Sie die Achsenmarkierungen in Abb.1 mit Werten, tragen Sie die gefundenen Punkte in die Abb.1 ein und benennen Sie diese. **/4**

**(Ende Aufgabe 1)**

**2****/15**

Die gesuchte Funktion  $f$  hat den Grad 4. Ihr Graph schneidet die  $y$ -Achse im Punkt  $S_Y(0|12)$ . Die im Punkt  $S_Y$  anliegende Tangente hat die Steigung  $m_T = -4$ . Der Graph der Funktion  $f$  berührt die  $x$ -Achse bei  $x_N = -2$ . Die erste Ableitungsfunktion hat an der Stelle  $x_1 = -1$  die Steigung  $-6$ .

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion.

Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie ersatzweise das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung  $f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  der Funktion  $f$ .

Gehen Sie davon aus, dass der fehlende Parameter  $a_0$  den Wert 12 hat.

$$\begin{aligned} 84 &= 196a_4 + 54a_3 + 12a_2 + a_1 \\ -56 &= 48a_4 - 24a_3 + 12a_2 - a_1 \\ 16 &= -96a_4 + 36a_3 - 12a_2 - a_1 \\ -78 &= -190a_4 - 50a_3 - 12a_2 - a_1 \end{aligned}$$

**3****/15**

Für eine Messehalle wird eine Werbefläche in Form eines Zylinders geplant, der an zentraler Stelle auf dem Boden stehen soll und auch von oben betrachtet werden kann.

Die Werbefläche, bestehend aus dem Mantel und der oberen Deckfläche, soll insgesamt  $60 \text{ m}^2$  betragen. Der Zylinder ist so zu gestalten, dass sein Volumen möglichst groß ist.

- 3.1** Skizzieren Sie den Körper. Benennen Sie den Radius  $r$  sowie die Höhe  $h$ . **/1**
- 3.2** Weisen Sie nach, dass die Zielfunktion zur Bestimmung des Volumens wie folgt **/6**  
lautet: 
$$V(r) = -\frac{\pi}{2}r^3 + 30r$$
- 3.3** Wie sind Radius und Höhe zu wählen, wenn das Volumen des Zylinders möglichst **/7**  
groß werden soll?
- 3.4** Berechnen Sie das Volumen dieses Zylinders. **/1**

4

/30

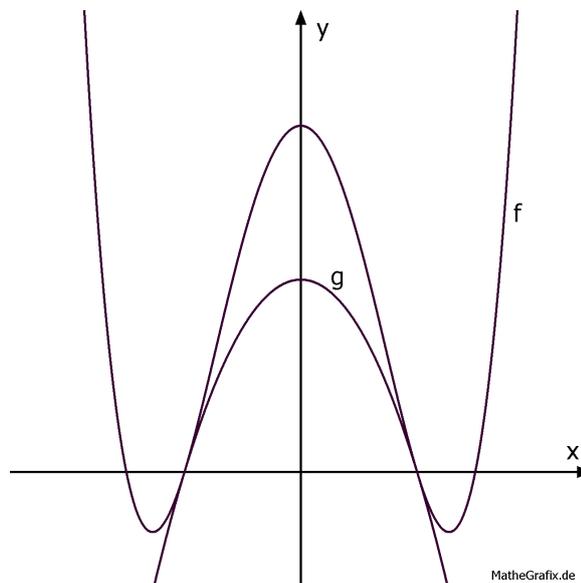
Gegeben sind die Funktionen  $f$  und  $g$

mit den Funktionsgleichungen

$$f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{13}{6}x^2 + 6 \text{ und}$$

$$g(x) = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{10}{3}; x \in \mathbf{R}$$

und die zugehörigen Graphen.



**4.1** Berechnen Sie den Inhalt der Fläche  $A_1$ , die von den Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  vollständig eingeschlossen wird. /12

**4.2** Welche Eigenschaften müssen die Graphen zweier Funktionen besitzen, wenn sie sich in einem gemeinsamen Punkt berühren? /5

Weisen Sie nach, dass sich die Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  an den Stellen  $x_1 = -2$  und  $x_1 = 2$  berühren.

**4.3** Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche  $A_2$ , die von dem Graphen der Funktion  $f$  und der  $x$ -Achse vollständig eingeschlossen wird. /11

**4.4** Bestimmen Sie den Wert des Integrals  $\int_{-3}^3 f(x) dx$ . /2

Sie können dabei die Ergebnisse aus 4.3 verwenden.

# Abschlussprüfung Fachoberschule 2011 Mathematik

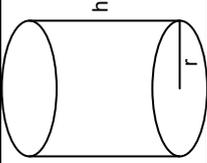
## Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

| Aufg. 1                            | Erwartete Teilleistung   |   |            | BE in AB              |      |   | Erbrachte Teilleistung |              |   |   |      |   |    |       |   |    |       |   |    |      |   |    |      |   |  |  |  |  |
|------------------------------------|--|---|------------|-----------------------|------|---|------------------------|--------------|---|---|------|---|----|-------|---|----|-------|---|----|------|---|----|------|---|--|--|--|--|
|                                    |  |   |            |                       |      |   | BE                     | Begutachtung |   |   |      |   |    |       |   |    |       |   |    |      |   |    |      |   |  |  |  |  |
| 1.1                                |  | <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="width: 15%;">Stütze Nr.</th> <th style="width: 15%;">x</th> <th style="width: 70%;">f(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0</td><td>2,00</td></tr> <tr><td>2</td><td>5</td><td>9,23</td></tr> <tr><td>3</td><td>10</td><td>16,40</td></tr> <tr><td>4</td><td>15</td><td>13,03</td></tr> <tr><td>5</td><td>20</td><td>3,60</td></tr> <tr><td>6</td><td>25</td><td>7,63</td></tr> </tbody> </table> | Stütze Nr. | x                     | f(x) | 1 | 0                      | 2,00         | 2 | 5 | 9,23 | 3 | 10 | 16,40 | 4 | 15 | 13,03 | 5 | 20 | 3,60 | 6 | 25 | 7,63 | 6 |  |  |  |  |
| Stütze Nr.                         | x  | f(x)  |            |                       |      |   |                        |              |   |   |      |   |    |       |   |    |       |   |    |      |   |    |      |   |  |  |  |  |
| 1                                  | 0  | 2,00  |            |                       |      |   |                        |              |   |   |      |   |    |       |   |    |       |   |    |      |   |    |      |   |  |  |  |  |
| 2                                  | 5  | 9,23  |            |                       |      |   |                        |              |   |   |      |   |    |       |   |    |       |   |    |      |   |    |      |   |  |  |  |  |
| 3                                  | 10   | 16,40   |            |                       |      |   |                        |              |   |   |      |   |    |       |   |    |       |   |    |      |   |    |      |   |  |  |  |  |
| 4                                  | 15   | 13,03   |            |                       |      |   |                        |              |   |   |      |   |    |       |   |    |       |   |    |      |   |    |      |   |  |  |  |  |
| 5                                  | 20   | 3,60  |            |                       |      |   |                        |              |   |   |      |   |    |       |   |    |       |   |    |      |   |    |      |   |  |  |  |  |
| 6                                  | 25   | 7,63  |            |                       |      |   |                        |              |   |   |      |   |    |       |   |    |       |   |    |      |   |    |      |   |  |  |  |  |
| 1.2                                | <p>Ansatz: <math>f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0,004x^3 - 0,132x^2 + 0,968x = 0 \Leftrightarrow</math><br/> <math>x(0,004x^2 - 0,132x + 0,968) = 0</math><br/> <math>\Rightarrow x_{E1} = 0</math> oder<br/> <math>0,004x^2 - 0,132x + 0,968 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 33x + 242 = 0</math><br/> <math>\Rightarrow x_{E2} = 11</math> und <math>x_{E3} = 22</math></p> <p>Hinreichende Bedingung <math>f''(x) \neq 0</math> prüfen<br/> <math>f''(x) = 0,012x^2 - 0,264x + 0,968</math><br/> <math>f''(0) = 0,97 &gt; 0 \Rightarrow</math> <i>Minimalstelle</i><br/> <math>f''(11) = -0,48 &lt; 0 \Rightarrow</math> <i>Maximalstelle</i><br/> <math>f''(22) = 0,97 &gt; 0 \Rightarrow</math> <i>Minimalstelle</i><br/>                     Alternativ kann eine verbale Begründung geliefert werden.<br/>                     y-Koordinaten berechnen<br/> <math>f(0) = 2</math> (siehe 1.1); <math>f(11) = 16,64</math>; <math>f(22) = 2</math><br/>                     Der maximale Höhenunterschied beträgt <math>16,64 \text{ m} - 2 \text{ m} = 14,64 \text{ m}</math>.</p> |   |            | 1<br>1<br>1<br>2<br>2 |      |   |                        |              |   |   |      |   |    |       |   |    |       |   |    |      |   |    |      |   |  |  |  |  |
| Zwischensumme Aufgabe 1.1 bis 1.2: |  |   |            | 10                    | 11   | 0 | Übertrag ↗             |              |   |   |      |   |    |       |   |    |       |   |    |      |   |    |      |   |  |  |  |  |

| Aufg. 1    | Erwartete Teilleistung   | BE in AB |    |     | Erbrachte Teilleistung |              |
|------------|--|----------|----|-----|------------------------|--------------|
|            |  | I        | II | III | BE                     | Begutachtung |
|            | ↳ Übertrag:  | 10       | 11 | 0   |                        |              |
| <b>1.3</b> | $f'(x) = 0,004x^3 - 0,132x^2 + 0,968x$<br>$f''(x) = 0,012x^2 - 0,264x + 0,968$<br>$f'''(x) = 0,024x - 0,264$<br>Notwendige Bedingung für Wendestellen: $f'''(x) = 0 \Leftrightarrow$<br>$0,012x^2 - 0,264x + 0,968 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 22x + 80,67 = 0$<br>$\Rightarrow x_{W1} = 4,65$ und $x_{W2} = 17,35$<br>Hinreichende Bedingung $f'''(x) \neq 0$ prüfen<br>$f'''(4,65) = -0,15 \neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle<br>$f'''(17,35) = 0,15 \neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle<br>Steigungswerte berechnen<br>$f'(4,65) = 2,05$ ; $f'(17,35) = -2,05$ ; $f'(25) = 4,2$<br>y-Koordinaten berechnen<br>$f(4,65) = f(17,35) = 8,51$ ; $f(25) = 7,63$ (siehe 1.1)<br>Am steilsten bergauf geht es in $P_1(25 7,63)$ ; Steigung: 4,2<br>Am steilsten bergab geht es in $P_2(17,35 8,51)$ ; Steigung: -2,05 | 1        | 1  |     |                        |              |
|            | Zwischensumme Aufgabe 1.1 bis 1.4:   | 17       | 18 | 1   |                        | Übertrag ↗   |

| Aufg. 1 | Erwartete Teilleistung                | BE in AB |    |     | Erbrachte Teilleistung                 |              |
|---------|---------------------------------------|----------|----|-----|--|--------------|
|         |                                       | I        | II | III | BE                                     | Begutachtung |
|         | ↳ Übertrag:                           | 17       | 18 | 1   |  |              |
| 1.4     | Punkte eingetragen und benannt (s.u.) | 4        |    |     |  |              |
|         |                                       |          |    |     |  |              |
|         | Summe:                                | 21       | 18 | 1   |  |              |
|         | Mögliche BE:                          | 40       |    |     |  |              |
|         |                                       |          |    |     | <b>Erreichte BE Endsumme Aufgabe 1</b> |              |

| Aufg. 2   | Erwartete Teilleistung   | BE in AB |    |     | Erbrachte Teilleistung                 |              |
|---|--|----------|----|-----|--|--------------|
|   |  | I        | II | III | BE                                     | Begutachtung |
| 2   | Ansatz:<br>$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$<br>$f'(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$<br>$f''(x) = 12a_4x^2 + 6a_3x + 2a_2$ | 1        |    |     |  |              |
|   | Bedingungsgefüge:  |          |    |     |  |              |
|   | 1. Punkt $S_y(0 12)$ :<br>$f(0) = 12 = a_0$  | 1        |    |     |  |              |
|   | 2. $m_T = -4$ in $S_y$ :<br>$f'(0) = -4 = a_1$   | 2        |    |     |  |              |
|   | 3. $x_N$ ist Nullstelle:<br>$f(-2) = 0 = 16a_4 - 8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + a_0$   | 1        |    |     |  |              |
| 4. $x_N$ ist Extremstelle:<br>$f'(-2) = 0 = -32a_4 + 12a_3 - 4a_2 + a_1$                                      | 2  |          |    |     |  |              |
| 5. $m_T = -6$ bei $x_1$ von $f'$ :<br>$f''(-1) = -6 = 12a_4 - 6a_3 + 2a_2$                                    | 2  |          |    |     |  |              |
| Gleichungssystem:<br>$-20 = 16a_4 - 8a_3 + 4a_2$<br>$4 = -32a_4 + 12a_3 - 4a_2$<br>$-6 = 12a_4 - 6a_3 + 2a_2$ |  | 1        |    |     |  |              |
| $a_4 = 1$ ; $a_3 = 0$ ; $a_2 = -9$ ; $a_1 = -4$ ; $a_0 = 12$  |  | 4        |    |     |  |              |
| $f(x) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12$   | 1  |          |    |     |  |              |
|   | Summe:   | 5        | 10 | 0   |  |              |
|   | Mögliche BE:   | 15       |    |     |  |              |
|   |  |          |    |     | <b>Erreichte BE Endsumme Aufgabe 2</b> |              |

| Aufg. 3                                | Erwartete Teilleistung  | BE in AB |    |             | Erbrachte Teilleistung<br>Begutachtung |
|--|---|----------|----|-------------|--|
|  |   | I        | II | III         |  |
| <b>3.1</b>                             |    | 1        |    |             |  |
| <b>3.2</b>                             | HB: $V(r, h) = \pi r^2 h$<br>NB: $A = 60 = 2\pi r h + \pi r^2$<br>$h = \frac{60 - \pi r^2}{2\pi r}$<br>ZF: $V(r) = \pi r^2 \frac{60 - \pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}(60 - \pi r^2) = -\frac{\pi}{2}r^3 + 30r$   |          | 1  | 1<br>1<br>3 |  |
| <b>3.3</b>                             | $V'(r) = -\frac{3}{2}\pi r^2 + 30 = 0$<br>$r_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{20}{\pi}} \approx \pm 2,52$ ; die negative Lösung ist sinnlos i.S.d.A.<br>$V''(r) = -3\pi r$<br>$V''(2,52) = -23,75 < 0 \Rightarrow$ Maximum bei $r_1$<br>$h_1 = \frac{60 - \pi r_1^2}{2\pi r_1} = 2,53$<br>Der Radius und die Höhe müssen ca. 2,52 m betragen.. | 1        | 2  | 1<br>1<br>2 |  |
| <b>3.4</b>                             | $V(r, h) = \pi r^2 h = 50,47$<br>Das Volumen des Zylinders beträgt ca. 50,47 m³.  | 1        |    |             |  |
| Summe:                                 |   | 3        | 7  | 5           |  |
| Mögliche BE:                           |   | 15       |    |             |  |
| <b>Erreichte BE Endsumme Aufgabe 3</b> |   |          |    |             | ▼                                      |

| Aufg.4           | Erwartete Teilleistung  | BE in AB                        |             |                  | Erbrachte Teilleistung              |              |
|------------------|---|---------------------------------|-------------|------------------|-------------------------------------|--------------|
|                  |   | I                               | II          | III              | BE                                  | Begutachtung |
| <b>4.1</b>       | <p>a) Schnittstellen von f und g:<br/> <math>f(x) = g(x)</math><br/> <math>\frac{1}{6}x^4 - \frac{13}{6}x^2 + 6 = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{10}{3}</math><br/>                     Substitution: <math>z^2 - 8z + 16 = 0</math><br/> <math>z_{1,2} = 4</math> und damit <math>x_{1,2} = -2; x_{3,4} = 2</math></p> <p>b) Fläche zwischen f und g:<br/>                     Unter Beachtung der Symmetrie gilt:<br/> <math>A_1 = 2 \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx = 2 \int_0^2 \left( \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3} \right) dx</math><br/>                     Stammfunktion: <math>D(x) = \frac{1}{30}x^5 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{8}{3}x</math><br/> <math>A_1 = 2 \cdot D(2) = 2 \cdot \frac{256}{90} = \frac{256}{45} FE \approx 5,69 FE</math></p> | 1<br>1<br>2<br>1<br>2<br>1<br>1 | 2<br>1<br>2 |                  |                                     |              |
| <b>4.2</b>       | <p>Die Graphen müssen in den Berührungspunkten die gleiche Steigung und die gleichen Funktionswerte haben.<br/> <math>f''(x_0) = g'(x_0)</math> und <math>f(x_0) = g(x_0)</math><br/>                     Nachweis:<br/> <math>f''(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{13}{3}x</math> und <math>g'(x) = -\frac{5}{3}x</math><br/> <math>f''(2) = -\frac{10}{3} = g'(2)</math> und <math>f'(-2) = \frac{10}{3} = g'(-2)</math><br/> <math>f(\pm 2) = g(\pm 2)</math> siehe 4.1</p>   |                                 |             | 1<br>1<br>1<br>1 |                                     |              |
| <b>Übertrag:</b> |   | 6                               | 7           | 4                | <b>Erreichte BE (Zwischensumme)</b> |              |

| Aufg.4     | Erwartete Teilleistung  | BE in AB |    |     |                                   | Erbrachte Teilleistung                 |  |
|------------|---|----------|----|-----|-----------------------------------|--|--|
|            |   | I        | II | III | BE                                | Begutachtung                           |  |
|            | Übertrag  | 6        | 7  | 4   | Erreichte BE (Zwischensumme, s.o) |  |  |
| <b>4.3</b> | <p>Nullstellen von f: <math>\frac{1}{6}x^4 - \frac{13}{6}x^2 + 6 = 0</math></p> <p>Substitution: <math>z^2 - 13z + 36 = 0</math><br/> <math>z_1 = 4</math> und <math>z_2 = 9</math><br/> <math>x_{N1,2} = \pm 2</math> und <math>x_{N3,4} = \pm 3</math></p> <p>Flächenberechnung: Unter Beachtung der Symmetrie gilt:<br/> <math>A_0 = 2 \int_0^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 (\frac{1}{6}x^4 - \frac{13}{3}x^2 + 6) dx</math><br/>                     und <math>A_u = -2 \int_2^3 f(x) dx</math></p> <p>Stammfunktion: <math>F(x) = \frac{1}{30}x^5 - \frac{13}{18}x^3 + 6x</math></p> <p><math>A_0 = 2 \cdot F(2) = 2 \cdot \frac{656}{90} = \frac{656}{45} FE</math></p> <p><math>A_u = -2(F(3) - F(2)) = -2(\frac{2349}{90} - \frac{2411}{90}) = \frac{62}{45} FE</math></p> <p><math>A_2 = \frac{656}{45} + \frac{62}{45} = \frac{718}{45} FE \approx 15,96 FE</math></p> | 1        | 1  | 1   |                                   |  |  |
| <b>4.4</b> | <p><math>\int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{656}{45} - \frac{62}{45} = \frac{594}{45}</math></p> <p>Integralwerte der Flächenstücke unterhalb der x-Achse sind negativ.</p>  | 1        | 1  | 1   |                                   |  |  |
|            | Summe   | 11       | 15 | 4   |                                   |  |  |
|            | Mögliche BE:  | 30       |    |     |                                   |  |  |
|            |   |          |    |     |                                   | <b>Erreichte BE Endsumme Aufgabe 4</b> |  |