Abschlussprüfung Fachoberschule
2011 Herbst, (Mathematik)
Aufgabenvorschlag B

1 /40

Eine Schiff (siehe Foto) wurde als Doppelrumpfschiff (Katamaran) gebaut. Der mittlere Teil des Querschnitts des Schiffsrumpfes entspricht näherungsweise der Funktion f mit:

$$f(x) = 0{,}2x^4 - 1{,}8x^2;\ x \in D_f.$$

(Hinweis: 1 LE entspricht 1 m)

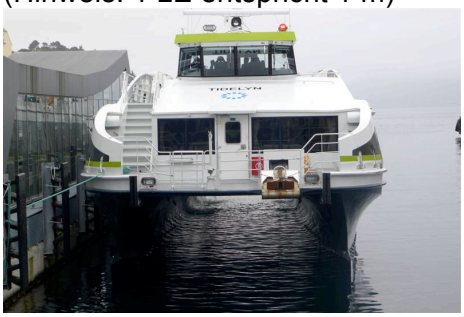
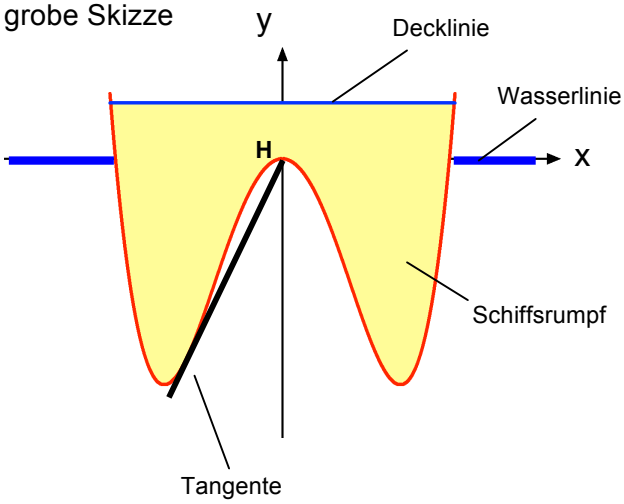


Foto: J. Lehnen

grobe Skizze



1.1 Geben Sie das Symmetrieverhalten des Funktionsgraphen an. Begründen Sie Ihre Aussage. **/2**

1.2 Berechnen Sie mit Hilfe einer Nullstellenberechnung die Gesamtbreite des Schiffsrumpfes auf Höhe der Wasserlinie. **/6**

1.3 Berechnen Sie die y-Koordinaten der Tiefpunkte (Tiefgang). **/10**

1.4 Berechnen Sie die Länge der waagerechten Decklinie, wenn diese 1m über dem Hochpunkt $H(0\,|\,0)$ liegt. **/6**

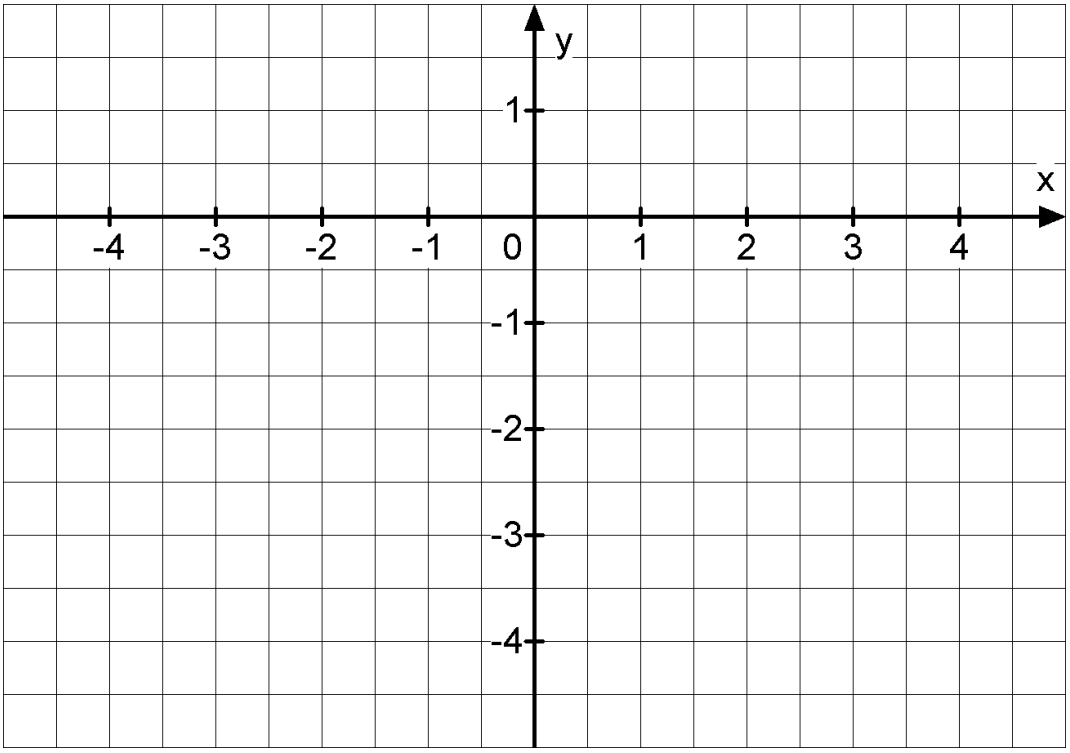
1.5 Zeichnen Sie den Graphen von f zusammen mit der Decklinie in das nachstehende Koordinatensystem (*siehe nächste Seite*). **/5**

1.6 Damit das Schiff „unsinkbar“ ist, soll der Doppelrumpf des Schiffes mit Styropor bis zur Höhe der Wasserlinie ($y = 0$) ausgefüllt werden. Berechnen Sie das Volumen an Styropor in den mittleren 12 m des Schiffes (*der Querschnitt ändert sich in diesem Bereich nicht*). **/6**

1.7 Im Hochpunkt H des Graphen von f soll für Unterwasserbeobachtungen eine Kamera angebracht werden. Man möchte wissen, wie groß der Blickwinkel der Kamera in Richtung Meeresgrund ist. Hierzu muss man zwei Tangenten durch den Punkt H an den Schiffsrumpf (Graph von f) anlegen. Die Gleichung einer dieser Tangenten an f lautet: $t(x) = 2{,}08x$. Berechnen Sie den Blickwinkel α. **/5**

→ Fortsetzung nächste Seite →

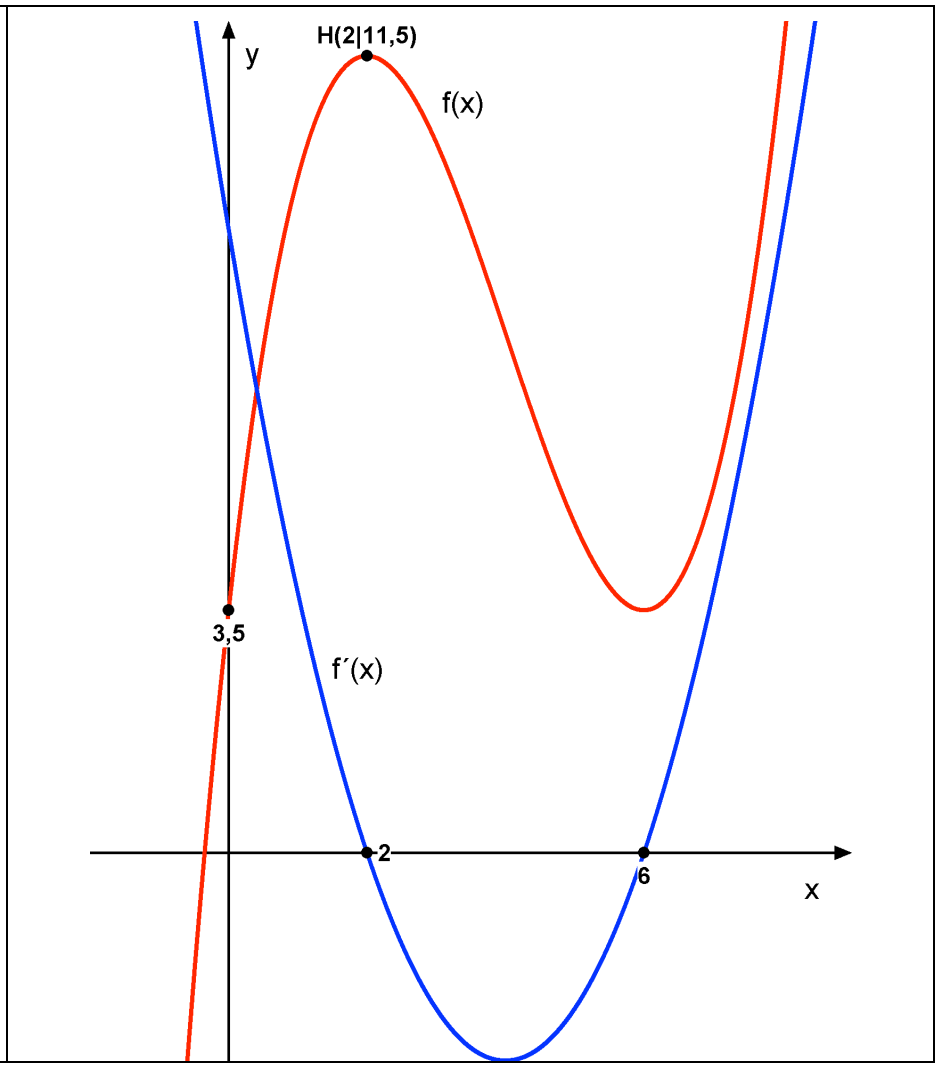
graphische Darstellung zu 1.5



2 **/15**

Von einer Funktion f dritten Grades ist das Schaubild mit den Graphen der Funktion und der ersten Ableitung f' vorhanden.

Der Hochpunkt des Graphen von f lautet $H(2|11{,}5)$.



Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion. Verwenden Sie hierfür die in der Graphik gekennzeichneten Punkte bzw. Stellen.

Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie ersatzweise das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ *der Funktion f.*

23	=	16a	+	8b	+	4c	+	2d
0	=	36a	+	12b	+	3c		
0	=	108a	+	12b	+	c		
-7	=						-	2d

3 /15

Eine Firma stellt zylindrische Blechdosen für Gemüsekonserven her. Um den Materialverbrauch so gering wie möglich zu halten, soll eine Dose bei gegebener Oberfläche ein möglichst großes Volumen fassen. Pro Dose stehen 300cm² Blech zur Verfügung, Falze etc. sollen vernachlässigt werden.

Rechnen Sie ohne Einheiten:

/6

3.1 Zeigen Sie, dass V eine (Ziel-) Funktion ist, mit der das Volumen einer solchen Dose berechnet werden kann:

$$V(r) = 150r - \pi r^3$$

(1 LE entspricht 1 cm bzw. 1 VE entspricht 1 cm^3)

3.2 Ermitteln Sie, welche Abmessungen zu wählen sind, damit die Dose ein größtmögliches Fassungsvermögen hat. Berechnen Sie auch das maximale Volumen. **/6**

3.3 Ermitteln Sie den Definitionsbereich der Zielfunktion und prüfen Sie, ob Ihr ermitteltes Volumen tatsächlich das größtmögliche ist, indem Sie die Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs prüfen. **/3**

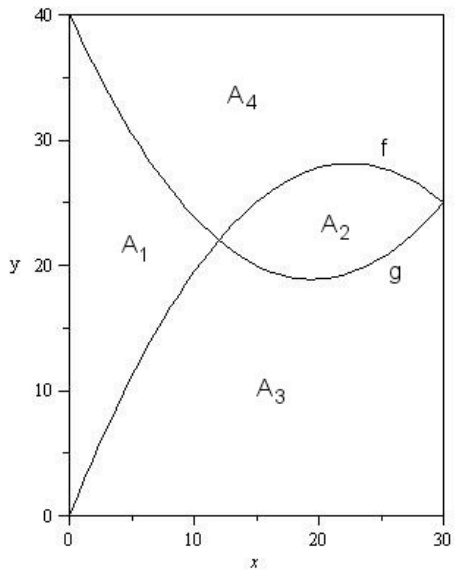
4 /30

Ein Rechteck mit den Seitenlängen 30 cm und 40 cm wird durch die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen:

$$f(x) = -\frac{1}{18}x^2 + \frac{5}{2}x\ ,\ x \in D_f \text{ und}$$

$$g(x) = \frac{1}{18}x^2 - \frac{13}{6}x + 40,\ x \in D_g$$

in vier Teile A_1, A_2, A_3 und A_4 zerlegt. (siehe die nebenstehende Abbildung; 1 LE entspricht 1 cm).



4.1 /10

Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^{30} f(x)\,dx$, und begründen Sie, warum der Wert des Integrals der Summe der Flächeninhalte von A_2 und A_3 in cm^2 entspricht.

Berechnen Sie weiterhin das bestimmte Integral $\int_0^{30} g(x)\,dx$. Wie lässt sich dieser Integralwert als Summe zweier Teilflächen darstellen?

4.2 Ermitteln Sie die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Funktionsgraphen von f und g auf rechnerischem Weg. Bestimmen Sie die Inhalte der Flächen A_1 und A_2. /12

4.3 Berechnen Sie die Inhalte der Flächen A_3 und A_4. /3

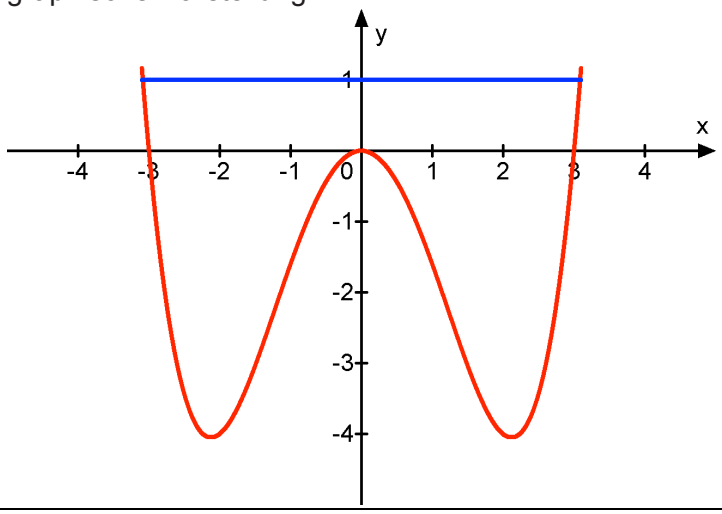
Hinweis: Sie können diese Werte ohne Integration bestimmen, wenn Sie die bereits berechneten Flächen und die Fläche des Rechtecks berücksichtigen.

4.4 /5

Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^{30} \left(g(x) - f(x)\right) dx$, und prüfen Sie, ob der Wert des Integrals der Summe der Flächeninhalte von A_1 und A_2 in cm^2 entspricht. Begründen Sie ihre Antwort.

Abschlussprüfung Fachoberschule
2011 Herbst, (Mathematik)
Erwartungshorizont Aufgabenvorschlag B

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
1.1	$f(x) = f(-x)$ oder die Exponenten von x sind gerade, der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.	2		
1.2	Nullstellen von f:			
	$f(x) = 0{,}2x^4 - 1{,}8x^2 = 0$	1		
	$x^4 - 9x^2 = 0$	1		
	$x^2(x^2 - 9) = 0$		1	
	$x_{1/2} = \pm 0$	1		
	$x_{3/4} = \pm 3$	1		
	Breite des Schiffsrumpfes auf Höhe der Wasserlinie: $b = 2x_3 = 6m$		1	
1.3	Bestimmung der Tiefpunkte:			
	$f(x) = 0{,}2x^4 - 1{,}8x^2$	1		
	$f'(x) = 0{,}8x^3 - 3{,}6x$	1		
	$f''(x) = 2{,}4x^2 - 3{,}6$		1	
	$f'(x) = 0$		1	
	$0{,}8x^3 - 3{,}6x = 0$			
	$x(0{,}8x^2 - 3{,}6) = 0$		1	
	$x_{E1} = 0$ (*Hochpunkt, siehe Skizze*)			
	$0{,}8x^2 - 3{,}6 = 0$		1	
	$x_{E2/3} \approx \pm\sqrt{4{,}5} \approx \pm 2.12m$		1	
	$f''(x_{E2}) = 7{,}2 < 0$; *Minimum*		1	
	$f''(x_{E3}) = 7{,}2 < 0$; *Minimum*		1	
	(*alternativ: Begründung über Verlauf des Graphen*)			
	$f(x_{E2}) = f(x_{E3}) = -4{,}05m$ (*Tiefgang*)		1	

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
1.4	Berechnung der Länge der Deckslinie:			
	$f(x)=1$	1		
	$0{,}2x^4-1{,}8x^2=1$			
	$0{,}2x^4-1{,}8x^2-1=0$	1		
	$x^4-9x^2-5=0$			
	$z=x^2$		1	
	$z^2-9z-5=0$		1	
	$z_{1/2}=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{(-9)^2}{4}+5}$			
	$z_1\approx 9{,}52\,;\, z_2\approx -0{,}52$		1	
	$x_{1/2}=\pm\sqrt{z_1}\approx\pm 3{,}09$			
	Da z_2 negativ ist, gibt es keine weiteren Lösungen.		1	
	Länge der Deckslinie : $l=2x_1=6{,}18m$			
1.5	graphische Darstellung: 	5		
1.6	Berechnung der Querschnittsfläche mittels Integralrechnung. Integrationsgrenzen sind die Nullstellen: Unter Ausnutzung der Symmetrie ergibt sich die Querschnittsfläche A:			
	$A=2\cdot\left\lvert\int_0^3(0{,}2x^4-1{,}8x^2)\,dx\right\rvert$		2	
	$=2\cdot\left\lvert\left[\left(\frac{0{,}2x^5}{5}-\frac{1{,}8x^3}{3}\right)\right]_0^3\right\rvert=12{,}96$		2	
	$V=A\cdot l=12{,}96m^2\cdot 12m=156m^3.$		2	

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
1.7	Berechnung des Blickwinkels über die Steigung des Graphen von *t*.			
	$t(x) = 2{,}08x$	1		
	$m_t = 2{,}08$	1		
	$\tan\beta = 2{,}08$			1
	$\beta \approx 64{,}3°$			1
	Der Winkel α_y zwischen der *y*-Achse und der Tangente ist somit $90° - 64{,}3° = 25{,}7°$.		1	
	Der Blickwinkel α hat die doppelte Größe: $51{,}4°$.			
	Summe	17	21	2
	mögliche BE		40	

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
2	Ansatz:			
	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	1		
	$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$	1		
	Bedingungsgefüge:			
	1. $f(2) = 11{,}5$ ($H(2\|11{,}5)$ ist Punkt vom Graphen von f)	1		
	2. $f'(2) = 0$ ($x_E = 2$ ist Extremstelle)		1	
	3. $f'(6) = 0$ ($x_E = 6$ ist Extremstelle)		2	
	4. $f(0) = 3{,}5$ ($y = 3{,}5$ ist y-Achsenabschnitt)	1		
	Gleichungssystem:			
	$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \text{I:} & 11{,}5 & = & 8a & + & 4b & + & 2c & + & d \\ \text{II:} & 0 & = & 12a & + & 4b & + & c & & \\ \text{III:} & 0 & = & 108a & + & 12b & + & c & & \\ \text{IV:} & 3{,}5 & = & & & & & & & d \end{array}$			
	Lösen des Gleichungssystems (ebenso Ersatz-LGS)		5	
	Daraus ergibt sich (auch Ersatz-LGS):			
	$a = \frac{1}{4}, \quad b = -3, \quad c = 9, \quad d = \frac{7}{2}$	2		
	Für die Funktionsgleichung gilt:			
	$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x + \frac{7}{2}$	1		
	Summe	7	8	0
	mögliche BE	15		

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
3.1	Erstellung der Zielfunktion $V_{Zyl}(r) = \pi r^2 \cdot h$ Hauptbedingung	1		
	$A_{Zyl} = A_{Rechteck} + 2 \cdot A_{Kreis}$ $= 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi r(r+h)$ $300 = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$ Nebenbedingung		1	
	Es folgt für h: $300 = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 \quad \mid -2\pi r^2$ $300 - 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot h \quad \mid : 2\pi r$ $\frac{300 - 2\pi r^2}{2\pi r} = h$		2	
	Eingesetzt in die Hauptbedingung: $V(r) = \pi r^2 \frac{300 - 2\pi r^2}{2\pi r}$ $= r \frac{300 - 2\pi r^2}{2}$ $= 150r - \pi r^3$ Zielfunktion		2	
3.2	Abmessungen: Bedingung für Maximum: $V'(r_{max}) = 0$ und $V''(r_{max}) < 0$	1		
	$V'(r) = 150 - 3\pi r^2$ $0 = 150 - 3\pi r^2$ $3\pi r^2 = 150$ $r^2 = \frac{150}{3\pi}$ $r = \pm\sqrt{\frac{150}{3\pi}} \approx \pm 3{,}99cm$		1	
	Überprüfung der Art des Extremums: $V''(r) = -6\pi r$ $V''(3{,}99) = -6\pi \cdot 3{,}99 \approx -75{,}21 < 0 \Rightarrow$ Maximum, $r = -3{,}99$ ist sinnlos.	1		
	Höhe der Dose: $h = \frac{300 - 2\pi r^2}{2\pi r}$ $h = \frac{300 - 2\pi \cdot 3{,}99^2}{2\pi \cdot 3{,}99} \approx 7{,}98cm$	1		

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Maximales Volumen: $V(3{,}99) = 150 \cdot 3{,}99 - \pi \cdot 3{,}99^3 \approx 398{,}94 cm^3$ Das größtmögliche Volumen der Dose beträgt $398{,}94 cm^3$ bei einem Radius von $3{,}99 cm$ und einer Höhe von $7{,}98 cm$.		1 1	
3.3	Kleiner als null kann der Radius nicht werden, bei gegebener Oberfläche kann der Radius nur auf Kosten der Höhe wachsen, deshalb ist die obere Grenze für r bei $r = \sqrt{\frac{150}{\pi}}$ erreicht. Dann besteht die Dose nur noch aus den beiden Deckeln mit zusammen $300 cm^2$ Flächeninhalt: $300 = 2\pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{150}{\pi}}$ Demnach ist $D_V = \left\{ r \in \mathbb{R} \mid 0 \le r \le \sqrt{\frac{150}{\pi}} \right\}$ der Definitionsbereich. Zu prüfen sind die Ränder: $V(0) = 150 \cdot 0 - \pi \cdot 0^3 = 0 cm^3$ und $V(\sqrt{\frac{150}{\pi}}) = 150 \cdot \sqrt{\frac{150}{\pi}} - \pi \cdot \sqrt{\frac{150}{\pi}}^3 = 0 cm^3$ Das gefundene Maximum ist das absolute.		1 1	1
	Summe	4	10	1
	mögliche BE		15	

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
4.1	Berechnung des bestimmten Integrals:			
	$\int_0^{30} f(x)dx = \int_0^{30}\left(-\frac{1}{18}x^2+\frac{5}{2}x\right)dx =$			
	$\left[-\frac{1}{54}x^3+\frac{5}{4}x^2\right]_0^{30} =$		2	
	$-\frac{1}{54}\cdot 30^3+\frac{5}{4}\cdot 30^2 = 625$	1		
	Das Integral entspricht der Fläche, die vom Graph von f und der x-Achse im Intervall $[0;30]$ begrenzt wird.			1
	Damit ergibt sich der Flächeninhalt: $A_2 + A_3 = 625\,\text{cm}^2$.		1	
	Berechnung des bestimmten Integrals:			
	$\int_0^{30} g(x)\,dx = \int_0^{30}\left(\frac{1}{18}x^2-\frac{13}{6}x+40\right)dx =$			
	$\left[\frac{1}{54}x^3-\frac{13}{12}x^2+40x\right]_0^{30} =$		2	
	$\frac{1}{54}\cdot 30^3-\frac{13}{12}\cdot 30^2+40\cdot 30 = 725$	1		
	Das Integral entspricht der Fläche, die vom Graph von g und der x-Achse im Intervall $[0;30]$ begrenzt wird.			1
	Damit ergibt sich der Flächeninhalt: $A_1 + A_3 = 725\,\text{cm}^2$.		1	
4.2	Bestimmung der Schnittstellen: Gleichsetzen $f(x) = g(x)$			
	$-\frac{1}{18}x^2+\frac{5}{2}x = \frac{1}{18}x^2-\frac{13}{6}x+40 \Leftrightarrow$		1	
	$\frac{1}{9}x^2-\frac{14}{3}x+40 = 0 \Leftrightarrow x^2-42x+360 = 0$		2	
	$x_{1,2} = 21 \pm \sqrt{(-21)^2-360} \Rightarrow x_1 = 12, x_2 = 30$		1	
	$g(x)-f(x) = \frac{1}{9}x^2-\frac{14}{3}x+40$			
	Berechnung der Flächeninhalte durch Integration:			
	$A_1 = \int_0^{12}\left(g(x)-f(x)\right)dx = \int_0^{12}\left(\frac{1}{9}x^2-\frac{14}{3}x+40\right)dx =$			1
	$\left[\frac{1}{27}x^3-\frac{7}{3}x^2+40x\right]_0^{12} = \frac{1}{27}\cdot 12^3-\frac{7}{3}\cdot 12^2+40\cdot 12 = 208$		2	
	Flächeninhalt: $A_1 = 208\,\text{cm}^2$	1		

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	$A_2 = \int_{12}^{30} \left(f(x) - g(x)\right) dx = \int_{0}^{12} \left(-\frac{1}{9}x^2 + \frac{14}{3}x - 40\right) dx =$			1
	$\left[-\frac{1}{27}x^3 + \frac{7}{3}x^2 - 40x\right]_{12}^{30} = -\frac{1}{27}\cdot 30^3 + \frac{7}{3}\cdot 30^2 - 40\cdot 30 -$		2	
	$\left(-\frac{1}{27}\cdot 12^3 + \frac{7}{3}\cdot 12^2 - 40\cdot 12\right) = 108$	1		
	Flächeninhalt: $A_2 = 108\,\text{cm}^2$			
4.3	Nach 4.1 und 4.2 gilt $A_2 + A_3 = 625\,\text{cm}^2$, $A_2 = 108\,\text{cm}^2$	1		
	und damit $A_3 = 517\,\text{cm}^2$.			
	Der Flächeninhalt des Rechteckes beträgt $A = 1200\,\text{cm}^2$	1		
	Damit ergibt sich $A_4 = A - A_1 - A_2 - A_3 = 367\,\text{cm}^2$	1		
4.4	Berechnung des bestimmten Integrals:			
	$\int_{0}^{30} \left(g(x) - f(x)\right) dx = \int_{0}^{30} \left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{14}{3}x + 40\right) dx =$			
	$\left[\frac{1}{27}x^3 - \frac{7}{3}x^2 + 40x\right]_{0}^{30} =$		2	
	$\frac{1}{27}\cdot 30^3 - \frac{7}{3}\cdot 30^2 + 40\cdot 30 = 100$	1		
	Der Integralwert ist also von der Summe der Flächeninhalte von A_1 und A_2 verschieden.		1	
	Grund dafür ist, dass im Intervall $[0;12]$ die Funktion f und im Intervall $[12;30]$ die Funktion g die oberen Begrenzungen der Flächen bilden.			1
	Summe	8	17	5
	mögliche BE	30		