Analysis 1

I.1 Keramik

Ein Unternehmen produziert u. a. bunte Keramikbecher, die in Kartons zu je 100 Bechern verkauft werden. Es werden aber auch kleinere Einheiten – sogar Einzelstücke – verkauft.

Pro Tag können Becher für maximal 8 Kartons produziert werden.

Erfahrungswerte über die anfallenden Gesamtkosten für Mengen bis zu 5 Kartonfüllungen können der nebenstehenden Tabelle entnommen werden.

Anzahl der 100er-Kartons	Erfahrungswerte für die Gesamtkosten in €
0	750
1	1190
2	1330
3	1390
4	1580
5	1920

Die Becher werden für 530 € je Karton an den Großhandel weitergegeben. Im Kleinverkauf sind die Becher aus Werbegründen nicht teurer (5,30 €/Stück).

Zur Kalkulation hat die Planungsabteilung der Firma eine Gesamtkostenfunktion K entwickelt mit $K(x) = 25x^3 - 200x^2 + 600x + 750$ (x ist die Anzahl der 100er-Kartons).

Der Graph dieser Funktion ist in der Anlage dargestellt.

Gehen Sie davon aus, dass es gelingt, alle produzierten Becher zu verkaufen.

a) Bestätigen Sie durch Rechnung, dass die Funktion K die gegebenen Tabellenwerte in guter Näherung erfasst. Darunter soll zu verstehen sein, dass die jeweiligen Abweichungen nicht mehr als 3 % der Erfahrungswerte betragen. (10P)

b)
- Ermitteln Sie grafisch denjenigen Produktionsbereich, für den mit Gewinn gearbeitet wird.
- Bestimmen Sie rechnerisch die Höhe des maximal erreichbaren Gewinns. (25P)

c) Die Firmenleitung möchte durch eine vorübergehende Preissenkung neue Marktanteile erobern. Daher soll kalkuliert werden, wie weit der Verkaufspreis vorübergehend gesenkt werden könnte, so dass die variablen Kosten K_v noch gerade eben gedeckt werden. Diesen Preis bezeichnet man als *kurzfristige Preisuntergrenze.*

- Zeichnen Sie den Graphen von K_v in die Abbildung ein.
- Ermitteln Sie zeichnerisch den Graphen derjenigen Erlösgeraden (genannt $E_{\min}$) mit dem geringstmöglichen Preis, der die variablen Gesamtkosten für eine spezielle Produktionsmenge gerade eben noch deckt.
- Bestimmen Sie einen Schätzwert für den Verkaufspreis, den Sie aus dieser Grafik als kurzfristige Preisuntergrenze entnehmen können. (20P)

d) Wir betrachten die variablen Stückkosten.

- Geben Sie die Gleichung für die Funktion der variablen Stückkosten k_v begründet an.
  Berechnen Sie dann das Minimum der variablen Stückkosten.
  Hinweis: $k_v(x) = 25x^2 - 200x + 600$.
- Vergleichen Sie die Ergebnisse der Aufgabenstellungen c) 3. Punkt und d) 1. Punkt und begründen Sie ohne Rechnung, warum Sie dieselben Ergebnisse erhalten müssen. (20P)

Das Konzept der Preispolitik ist aufgegangen: Durch eine vorübergehende Preissenkung wurde die Nachfrage nach den Keramikbechern deutlich erhöht. Die Firmenleitung beschließt daher, ab sofort Becher für 6 große 100er-Kartons pro Tag zu produzieren.

Es entstehen dafür Gesamtkosten von 2 910 €. Die Firmenleitung geht davon aus, wieder für den ursprünglichen Preis von 530 € verkaufen zu können.

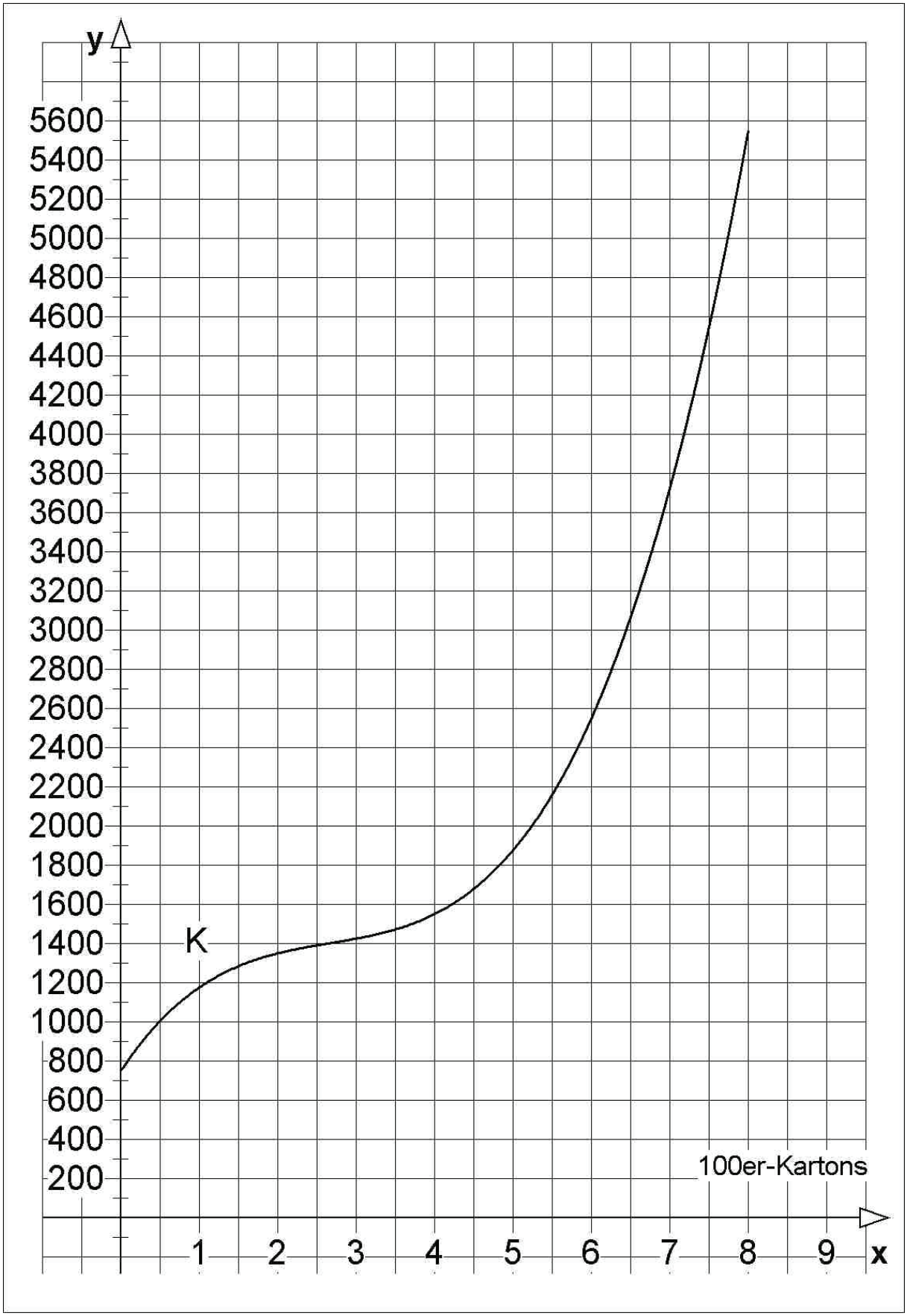
e) Die Planungsabteilung stellt fest, dass die bisher verwendete kubische Kostenfunktion K im betrachteten Produktionsbereich viel zu kleine Werte liefert. Die Planer vermuten daher, dass die Gesamtkosten ab einer Produktionsmenge von 5 Kartons nicht nur kubisch, sondern sogar exponentiell steigen. Sie wählen nun den Ansatz $K_{Exp}(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$.

Bestimmen Sie mithilfe der Erfahrungswerte (5|1 920) und (6|2 910) die Parametergrößen a und b. (15P)

Gehen Sie im Folgenden von $K_{Exp}(x) = 240 \cdot e^{0{,}416 \cdot x}$ für $x \geq 5$ aus.

f) Die Planer sollen die Firmenleitung beraten, ob eine Produktionsausweitung auf 6 oder mehr 100er-Kartons sinnvoll ist.
Beurteilen Sie, welchen Rat die Planer der Firmenleitung geben sollten, wenn sie ihre Modellfunktion K_{Exp} zur Entscheidung heranziehen. (10P)

Anlage zur Aufgabe „Keramik“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)				

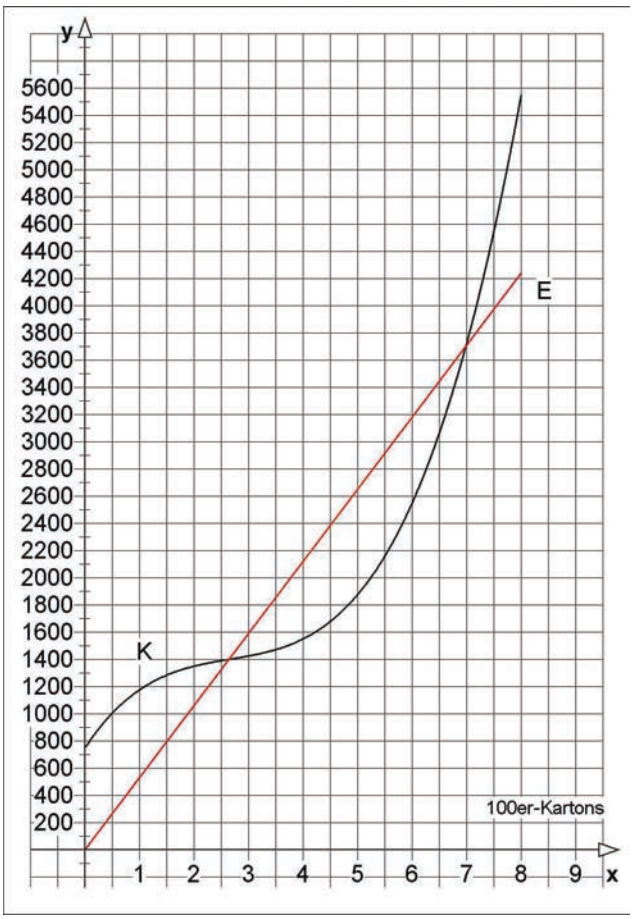
Anzahl der 100er-Kartons	Erfahrungswerte für die Gesamt-kosten in €	$K(x)$	Abweichung von $K(x)$ zu den Erfahrungswerten
0	750	750	0 %
1	1190	1175	–1,3 %
2	1330	1350	1,5 %
3	1390	1425	2,5 %
4	1580	1550	–1,9 %
5	1920	1875	–2,3 %

Die größte Abweichung beträgt 2,5 % und bleibt damit unter den geforderten 3 %.

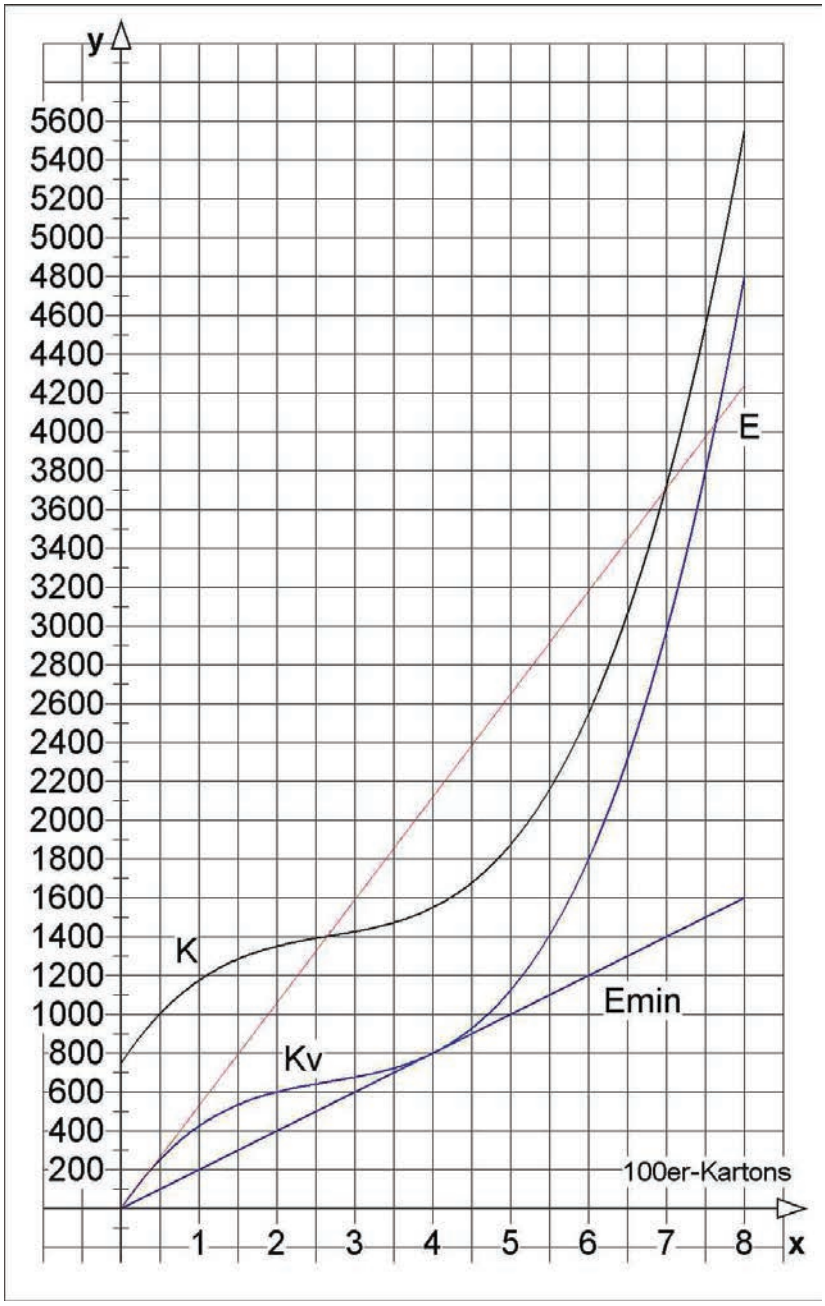
I: 10

b) (1) $E(x) = 530x$.

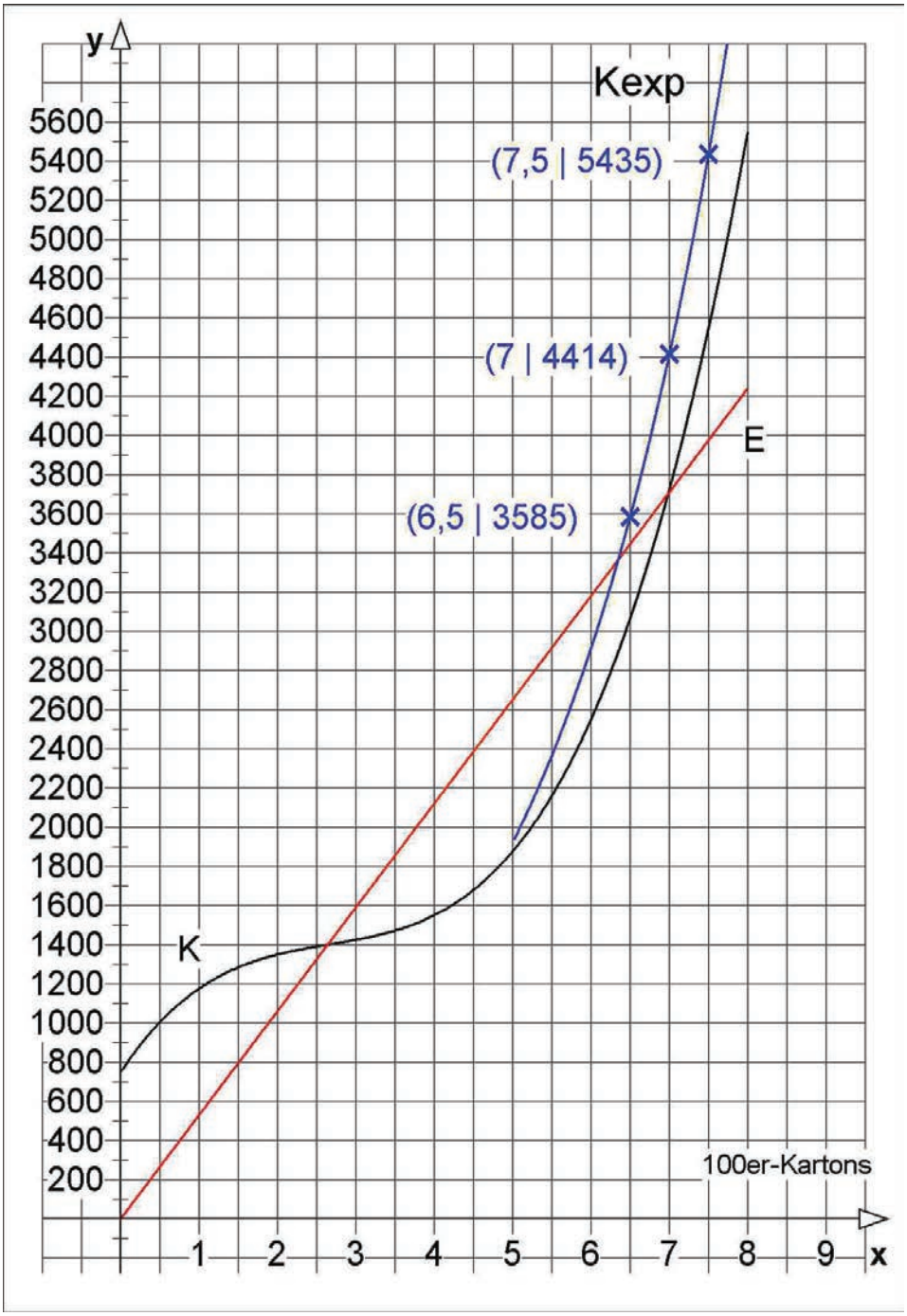
Grafische Bestimmung der Gewinnzone:



	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Die Erlösgerade wird in die Abbildung eingezeichnet; die Schnittpunkte von K und E werden abgelesen. Daraus ergibt sich, dass bei einer Produktion von etwa 2,6 bis etwa 7 Kartons täglich ein Gewinn erzielt wird. (2) $G(x)=E(x)-K(x)=530x-\left(25x^3-200x^2+600x+750\right)$ $G(x)=-25x^3+200x^2-70x-750$ $G'(x)=-75x^2+400x-70$. Für $G'(x)=0$ erhält man $-75x^2+400x-70=0$ $x^2-\frac{16}{3}x+\frac{14}{15}=0$ $x_{1,2}=\frac{8}{3}\pm\sqrt{\frac{64}{9}-\frac{14}{15}}$ $x_{1,2}=\frac{8}{3}\pm\sqrt{\frac{320}{45}-\frac{42}{45}}$ $x_{1,2}=\frac{8}{3}\pm\sqrt{\frac{278}{45}}$ $x_1=5{,}152...$ $x_2=0{,}181...$ x_2 liegt nicht in der Gewinnzone. Dass bei x_1 ein Hochpunkt vorliegt, ist an der Grafik aus b) (1) deutlich zu erkennen bzw. eine offensichtliche Eigenschaft der Funktion G. $H(5{,}15\|779{,}23)$ Der maximal erreichbare Gewinn beträgt rund 780 € täglich.	10	15	
c)	• $K_v=K-K_f$ $K_v(x)=25x^3-200x^2+600x$. Der Graph von K_v entsteht z.B. durch grafisches Subtrahieren der Fixkosten. *Grafische Darstellung siehe nächste Seite.*			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	 • Der Graph von $E_{\min}$ ist der Graph der Erlösgeraden geringster Steigung, die eine Tangente an den Graphen von K_v bildet. • Aus der Grafik kann die Vorschrift dieser Erlösgeraden beispielsweise durch ein Steigungsdreieck ermittelt werden (z.B. $p = \frac{600}{3} = \frac{800}{4} = ... = 200$) Die korrekte Vorschrift ist: $E_{\min}(x) = 200x$. Die kurzfristige Preisuntergrenze beträgt also 200 € pro Karton.		15	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	(1) $k_v(x) = \frac{K(x) - K_f}{x} = \frac{25x^3 - 200x^2 + 600x + 750 - 750}{x} = 25x^2 - 200x + 600$. Für die Tiefpunktbestimmung wird die Nullstelle der Ableitung der Funktion der variablen Stückkosten berechnet: $50x - 200 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$ Da der Graph von k_v eine nach oben geöffnete Parabel ist, liegt bei $x = 4$ ein Tiefpunkt. Tiefpunkt (4 | 200). Das Minimum der variablen Stückkosten beträgt also 200 € pro Karton. (2) Die kurzfristige Preisuntergrenze entspricht dem Minimum der variablen Stückkosten (siehe d1). Sie decken die bei der Produktion anfallenden variablen Kosten, nicht aber die Fixkosten, weshalb dieser Preis nur für relativ kurze Zeiträume gehalten werden kann. *Anschaulich heißt dies, dass die Erlösgerade mit minimaler Steigung den Graphen der variablen Gesamtkosten in einem Punkt berührt (siehe c3).*	10	5	5
e)	$a \cdot e^{5 \cdot b} = 1920$ $a \cdot e^{6 \cdot b} = 2910$ Division der zweiten Gleichung durch die erste liefert: $e^b = \frac{2910}{1920}$ Daraus folgt: $b = \ln\left(\frac{2910}{1920}\right) = 0,4158...$ Aus der Gleichung $a \cdot e^{5 \cdot \ln\left(\frac{2910}{1920}\right)} = 1920$ folgt $a = 240,072...$ So entsteht $K_{\exp}(x) = 240,072... \cdot e^{0,4158... \cdot x}$ *Es kommt nicht auf die Genauigkeit der Werte an, sondern vielmehr auf richtiges Vorgehen beim Lösen des Problems.*		15	
f)	Der Rat sollte lauten, nicht mehr als 5 Kartonfüllungen zu produzieren. Bei 6 Kartons wird zwar kein Verlust gemacht, aber der Gewinn ist nicht lohnend. Schon bei einer kleinen weiteren Produktionssteigerung (die Angabe $x = 6,35$ wird nicht erwartet) gerät die Firma nach dem K_{Exp}-Modell in den Verlustbereich. Um zu diesem Schluss zu gelangen, können passende Wertetabellen zu Kosten und Erlös oder zum Gewinn angelegt werden oder die Graphik kann um K_{Exp} ergänzt werden.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	 *Die Werte können durch Rundung etwas abweichen.*			10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Analysis 2

I.2 Pelzkrankheit bei Schafen

In einem großen Schafzuchtbetrieb wird eine Herde von 1000 jungen Schafen zur Produktion von Wolle gehalten. Eine Geburten- oder Sterberate kann bei diesen Tieren während des im Folgenden betrachteten Zeitraums vernachlässigt werden. An einem bestimmten Tag stellt der Züchter fest, dass 50 Schafe unter der so genannten Pelzkrankheit leiden (dieser Tag wird als Tag 0 bezeichnet).
Die Krankheit äußert sich durch lästigen Juckreiz. Außerdem kann sie langfristig die Qualität der Wolle beeinträchtigen. Sie ist zwar nicht lebensbedrohlich für die Schafe, doch der Heilungsprozess dauert einige Monate. Leider ist die Pelzkrankheit für die Schafe ansteckend.

Der Züchter weiß aus Erfahrung, dass die Anzahl der erkrankten Tiere sich näherungsweise mithilfe einer Funktion B mit $B(t) = G - g \cdot e^{-k \cdot t}$ beschreiben lässt.

a)
- Bestätigen Sie, dass in diesem Zusammenhang $G = 1000$ zu wählen ist.
- Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $g \cdot e^{-k \cdot t}$ im Sachkontext.
- Begründen Sie, dass hier $g = 950$ anzusetzen ist.
- Interpretieren Sie die Bedeutung und den Einfluss des Parameters k im Sachkontext. (20P)

Am nächsten Tag, genannt Tag 1, zählt der Züchter 87 kranke Tiere.

b) Auf Grundlage dieser Zählung soll eine Hochrechnung für den Parameter k durchgeführt werden. Bestimmen Sie k auf vier Nachkommastellen genau. (5P)

Der Züchter sieht sich auch bei Zählungen an den nächsten Tagen im Wesentlichen bestätigt, er arbeitet nun für Prognosen mit der Bestandsfunktion $B(t) = 1000 - 950 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t}$.

c) Angenommen, es würden *keine* Maßnahmen gegen die Krankheit unternommen:
- Berechnen Sie die Anzahl kranker Tiere am Tag 10 gemäß dem Modell.
- Bestimmen Sie gemäß dem Modell, nach wie vielen Tagen 50 % der Tiere von der Krankheit befallen sind.
- Skizzieren Sie den Graphen von B in das Koordinatensystem in der Anlage. (15P)

Natürlich ergreift der Züchter Maßnahmen: Er mischt ein Medikament ins Trinkwasser für alle Tiere. Er rechnet damit, dass ab dem Tag 6 ein Gesundungsprozess eintritt.

Um den Einfluss des Medikaments abschätzen zu können, geben Fachleute dem Züchter den Ansatz für eine neue Bestandsfunktion M nach Medikamentengabe an die Hand, die wiederum den Bestand der kranken Tiere beschreiben soll und ab dem Tag 6 Gültigkeit haben soll:

$$M(t) = a \cdot e^{b\cdot(t-6)-c\cdot(t-6)^2} = a \cdot e^{b\cdot(t-6)} \cdot e^{-c\cdot(t-6)^2} \text{ für } a,b,c > 0 .$$

Der Parameter b beschreibt im neuen Funktionsansatz M die Ansteckungsrate der Krankheit, der Parameter c misst die Stärke der Heilungswirkung des Medikaments.

d)
- Bestätigen Sie, dass $M(6) = a$ gilt, geben Sie die Bedeutung der Größe a im Sachkontext an und bestimmen Sie einen passenden Zahlenwert für a.
- Begründen Sie, warum sich nach dieser Modellfunktion der Einfluss des Medikamentes gegenüber dem Ansteckungsvorgang durchsetzen wird. (15P)

Für dieses Medikament setzen die Fachleute einen Wert von c = 0,012 an. Nehmen Sie außerdem an, dass der Wert der Ansteckungsrate b = 0,08 beträgt.
Arbeiten Sie im Folgenden mit der neuen Bestandsfunktion M mit $M(t) = 253 \cdot e^{0{,}08\cdot(t-6)-0{,}012\cdot(t-6)^2}$ weiter.

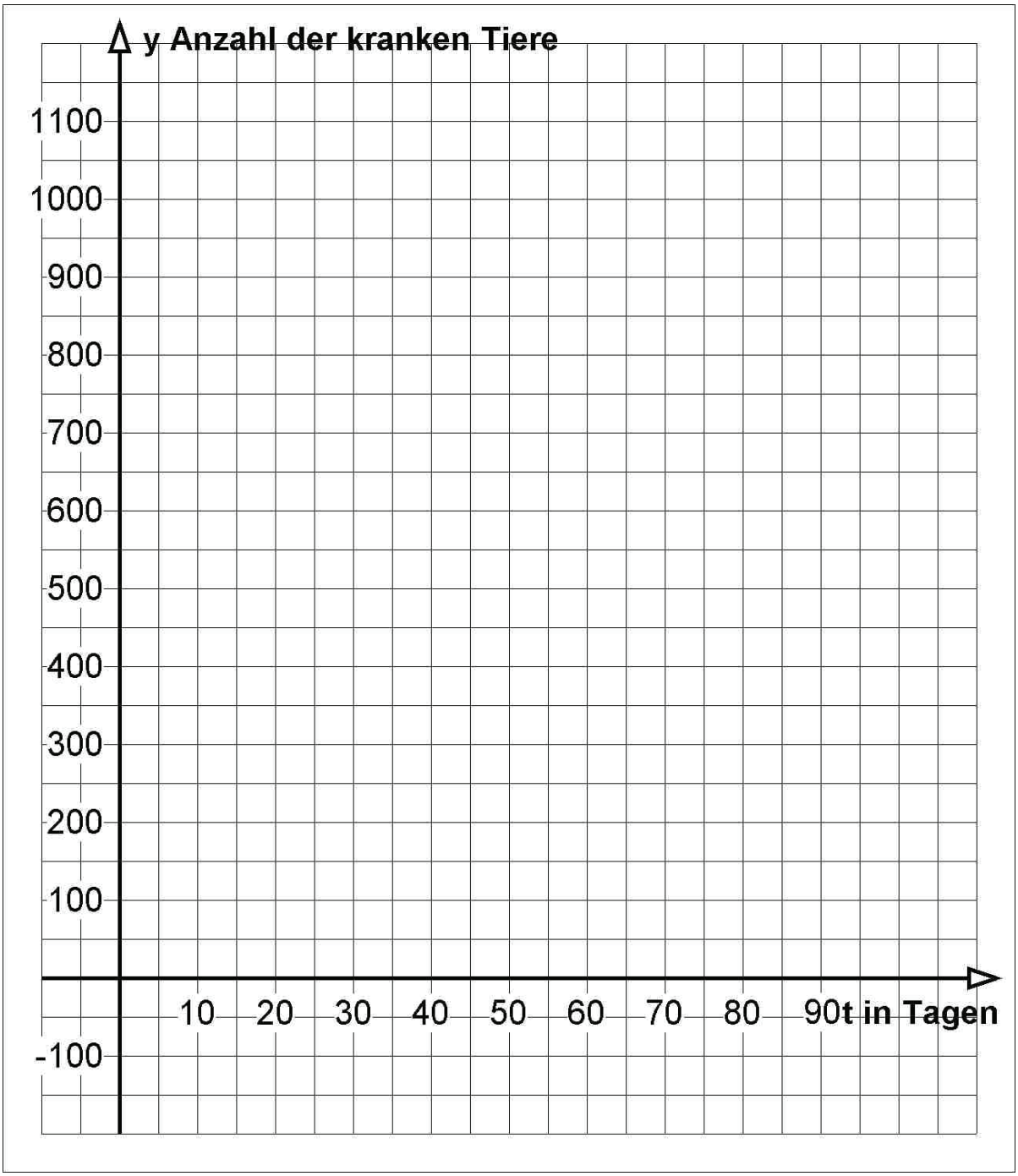
e) Bestätigen Sie: Die Änderungsrate des Bestands kranker Tiere wird ab t = 6 gemäß dem neuen Modell durch $m(t) = (20{,}24 - 6{,}072 \cdot (t-6)) \cdot e^{0{,}08\cdot(t-6)-0{,}012\cdot(t-6)^2}$ beschrieben. (10P)

f)
- Ermitteln Sie den Anstieg der Krankheitsfälle an der Stelle t = 6, der sich jeweils für die Funktion B und für die Funktion M ergibt.
- Interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachkontext. (15P)

Legen Sie auch bei der nachfolgenden Teilaufgabe das Modell mit der Funktion M zugrunde.

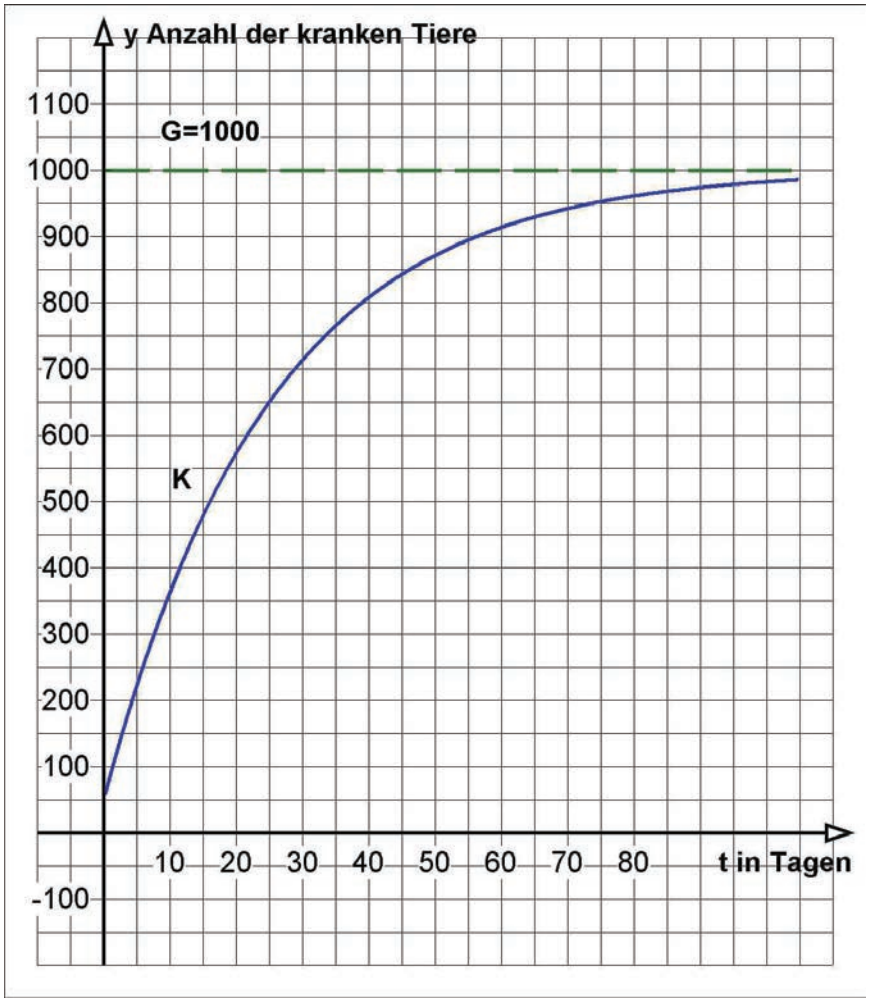
g)
- Bestimmen Sie den größten Bestand kranker Tiere und den zugehörigen Tag.
- Ermitteln Sie den Tag, an dem der Bestand kranker Tiere unter 1 % sinkt.
- Skizzieren Sie den Graphen von M in das Koordinatensystem in der Anlage, indem Sie die oben ermittelten Informationen heranziehen und zwei weitere sinnvolle Punkte berechnen. (20P)

Anlage zur Aufgabe „Schafe“

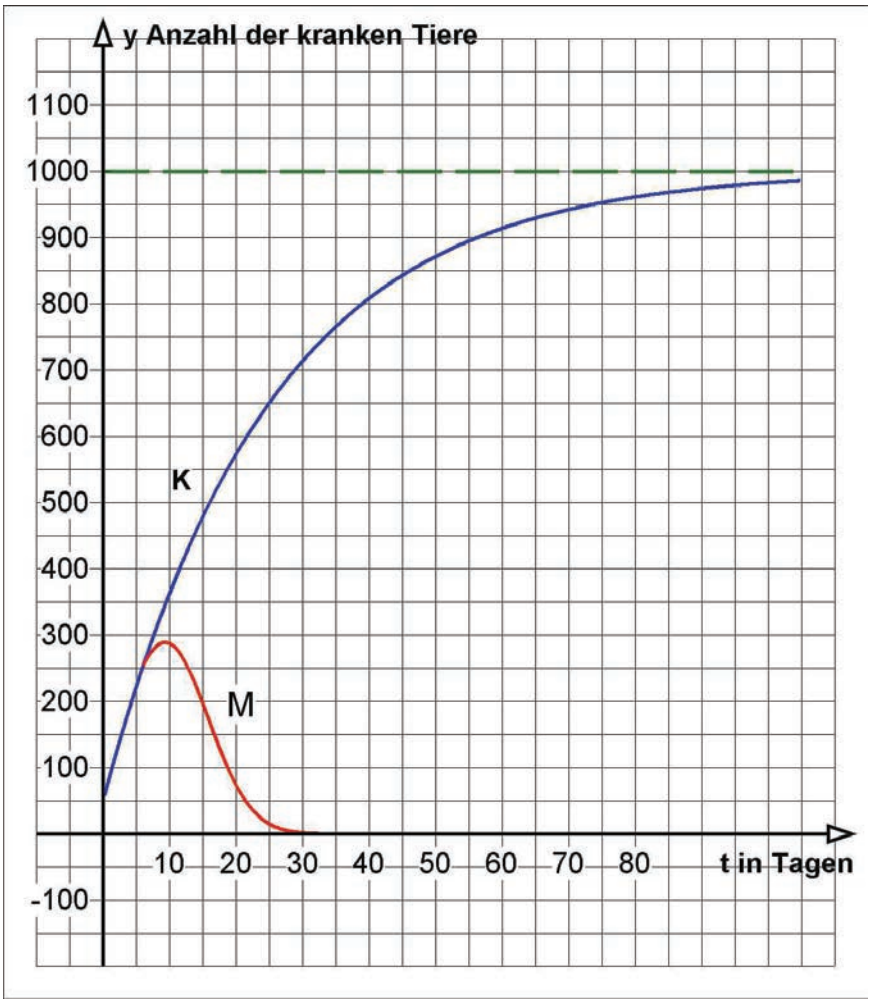


Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• B gibt den Bestand an kranken Tieren an. Langfristig werden ohne Eingriff alle Tiere, also 1000, erkrankt sein. B strebt gegen G für t gegen unendlich. Also muss $G = 1000$ angesetzt werden. • Die Anzahl der kranken Tiere erhält man, indem man von der Gesamtzahl die Anzahl der gesunden Tiere subtrahiert. Also gibt der Term $g \cdot e^{-k \cdot t}$ die Anzahl der gesunden Tiere an. Anfänglich gibt es 50 kranke Tiere, also 950 gesunde. $g \cdot e^{-k \cdot 0} = g$, daher muss $g = 950$ gesetzt werden. • k ist die Wachstumsrate für die Anzahl kranker Tiere. Je größer k ist, umso schneller sinkt der Bestand an gesunden Tieren und umso schneller steigt der Bestand an kranken Tieren.	10	10	
b)	Aus dem Ansatz $87 = B(1)$ ergibt sich: $87 = 1000 - 950 \cdot e^{-k \cdot 1}$ $-913 = -950 \cdot e^{-k}$ $e^{-k} = \frac{913}{950}$ $-k = \ln\left(\frac{913}{950}\right)$ $k = 0{,}039726...$, also $k \approx 0{,}0397$.		5	
c)	• $B(10) = 363{,}196...$. Für den Tag 10 gibt es eine Prognose von 363 kranken Tieren. • Zeitpunkt, an dem 50 % der Tiere von der Krankheit befallen sind: $B(t) = 500$ $1000 - 950 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} = 500$ $500 = 950 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t}$ $\frac{10}{19} = e^{-0{,}04 \cdot t}$ $t = \frac{\ln\left(\frac{10}{19}\right)}{-0{,}04}$ $t = 16{,}0463...$ Nach etwa 16 Tagen werden 50 % kranke Tiere vorausgesagt. *Zur Grafik:* *Die Näherungslinie y = 1000 wird in der Schülerlösung nicht erwartet.*			

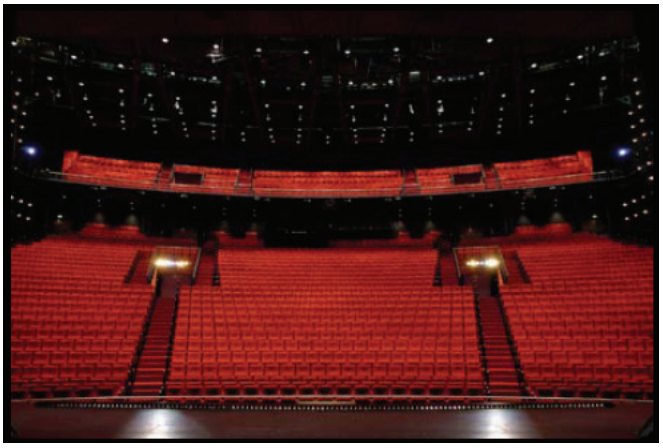
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
		10	5	
d)	• $M(6) = a \cdot 1 \cdot 1 = a$. a muss den Bestand an kranken Tieren zum Zeitpunkt $t = 6$ angeben. $M(6) = B(6) = 252{,}7035\ldots$. Also ist $a = 253$ sinnvoll. (Da M eine Modellfunktion ist, deren Ergebnisse jeweils interpretiert werden müssen, ist auch ein gebrochener Wert für a – etwa $a = 252{,}7$ – denkbar.) • Der Faktor $e^{b\cdot(t-6)}$ steigt streng monoton (weiterer Anstieg der Krankheitsfälle). Der Faktor $e^{-c\cdot(t-6)^2}$ sinkt streng monoton (Wirkung des Medikaments: Reduzierung der Krankheitsfälle). Je weiter t ansteigt, umso mehr beeinflusst der zweite Faktor den Bestand im Vergleich zum ersten Faktor, da hier die Zeit im Quadrat steht. Langfristig läuft also der Krankenbestand gegen Null.	5	5	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	Idee: Für die Änderungsrate *m* gilt: $m(t) = M'(t)$. $M(t) = 253 \cdot e^{0,08\cdot(t-6)-0,012\cdot(t-6)^2}$ Die Ableitung ergibt sich mit der Kettenregel zu $M'(t) = 253\cdot(0,08-0,012\cdot 2\cdot(t-6))\cdot e^{0,08\cdot(t-6)-0,012\cdot(t-6)^2}$ $= (20,24-6,072\cdot(t-6))\cdot e^{0,08\cdot(t-6)-0,012\cdot(t-6)^2}$		10	
f)	• $B'(t) = 38\cdot e^{-0,04\cdot t}$ $B'(6) = 29,8918...$ $M'(6) = 20,24$, da $t-6=0$ für $t=6$. • Im Verlauf der Bestandskurve entsteht also bei $t = 6$ ein Knick, denn $M'(6) < B'(6)$. Durch die Medikamentengabe nimmt hiernach die Stärke des Anstiegs der Krankheitsfälle ab dem Tag 6 sofort ab. Zu beachten ist aber, dass die Krankheitsfälle zunächst trotzdem noch zunehmen, da $M'(6) > 0$ ist.		10	5
g)	• Gesucht ist der Hochpunkt der Bestandsfunktion *M*. $M'(t) = 0 \Rightarrow 20,24-6,072\cdot(t-6) = 0$, da $e^{-0,08\cdot(t-6)-0,012\cdot(t-6)^2} \neq 0$. $\Rightarrow t = 9,\overline{3}$. $M\left(9,\overline{3}\right) = 289,085...$ Der Nachweis, dass ein Hochpunkt vorliegt, sollte argumentativ geführt werden. Der größte Bestand kranker Tiere wird nach diesem Modell am Tag 9 erreicht und beträgt 289 (oder rund 290) Tiere. • Ein Krankenstand unter 1 % bedeutet, dass es nur noch weniger als 10 kranke Tiere gibt. $253\cdot e^{0,08\cdot(t-6)-0,012\cdot(t-6)^2} = 10$ $0,08\cdot(t-6)-0,012\cdot(t-6)^2 = \ln\left(\frac{10}{253}\right) = -3,2308...$ $0,08t-0,48-0,012t^2+0,144t-0,432 = -3,2308...$ $-0,012t^2+0,224t-0,912 = -3,2308...$ $t^2-18,\overline{6}t+76 = 269,2336...$ $t^2-18,\overline{6}\,t-193,2336... = 0$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	$t^2 - 18{,}\overline{6}\,t - 193{,}2336... = 0$ $t_{1,2} \approx \frac{28}{3} \pm \sqrt{\frac{784}{9} + 193{,}2336}$ $t_1 \approx 26{,}09$ $t_2 \approx -7{,}41$ $t_2 \approx -7{,}41$ ist kein sinnvoller Wert im Rahmen des Sachkontextes. Nach etwa 26 Tagen liegt der Krankenstand unter 1 %. • Skizze des Graphen von *M*:  		10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

LA/AG 1

II.1 Konzerthalle



Für das Musical „Tarzan“ wird in einer musikbegeisterten Stadt eine neue Veranstaltungshalle gebaut. In der Planungsphase müssen sowohl das Bühnenbild als auch die technischen Abläufe des Musicals überdacht werden. In dieser Aufgabe werden einige Aspekte dieser Planung betrachtet:

Der Bühnenbereich liegt in der x_1-x_2-Ebene und wird begrenzt durch eine vordere Kante bei $x_1 = 10$ (siehe Anlage). Das Dach hat die Form eines Trapezes mit den Eckpunkten $A(80|-10|15)$, $B(80|70|15)$, $C(0|60|10)$ und $D(0|0|10)$.

Alle Zahlenangaben beziehen sich auf die Einheit Meter.

a) Zeichnen Sie das Dach (Punkte A, B, C, D) in das Koordinatensystem in der Anlage ein. (10P)

b)
- Bestimmen Sie eine Ebenengleichung für die Ebene, in der das Dach liegt [*die Decke des Theatersaales*], indem Sie drei der vier Punkte heranziehen.
- Bestätigen Sie rechnerisch, dass auch der vierte Punkt in dieser Ebene liegt. (15P)

Bei diesem Musical werden einige Szenen auch oberhalb der Zuschauer gespielt. Dabei bewegen sich die Schauspieler an Seilen, die an Schienen hängen. Für diese Schienen wird vereinfacht die Breite Null angenommen, so dass sie sich als Strecken (Teile von Geraden) beschreiben lassen.
Für zwei dieser Schienen, die mit g und h bezeichnet werden, sind Parameterdarstellungen bekannt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 12{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -32 \\ 29 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [0;1]$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 43{,}5 \\ 12{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in [0;2].$$

Diese beiden Schienen sind in die Dachebene eingelassen.

c) Weisen Sie für die durch g beschriebene Schiene nach, dass g Teil der Ebene ist, in der das Dach liegt. Skizzieren Sie diese Schiene in das Koordinatensystem (Anlage).
[*Falls in Teilaufgabe b) keine Ebenengleichung bestimmt wurde, kann die Ebenengleichung*
$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 12{,}5 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ -40 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ *mit* $p, q \in \mathbb{R}$ *genutzt werden.*] (25P)

d) Zeigen Sie, dass die durch g und h beschriebenen Schienen sich nicht treffen. (15P)

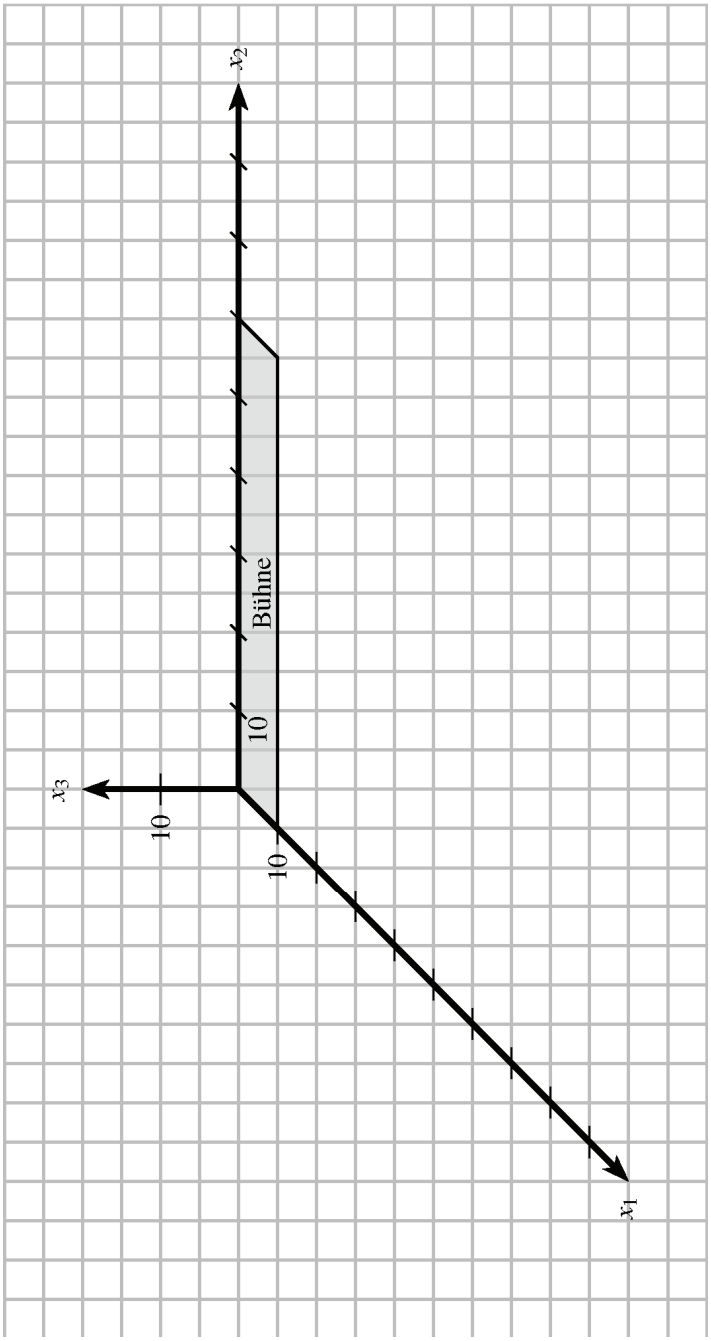
In einer Szene bewegt sich Tarzan vom 1. Rang an einem Seil hängend auf die Bühne. Das Seil hängt zu Beginn der Bewegung lotrecht (senkrecht zur x_1-x_2-Ebene) an der Schiene g. Das Seilende sowie die Füße von Tarzan befinden sich am Punkt $P(36 \mid 3{,}625 \mid 7)$. Die Bewegung endet am Schienenende im Bühnenbereich auf einem Podest, das vom Seilende berührt wird.

e)
- Skizzieren Sie in das Koordinatensystem die Lage des Seils zu Beginn und zum Ende der Fahrt.
- Bestimmen Sie die notwendige Höhe des Podestes. (15P)

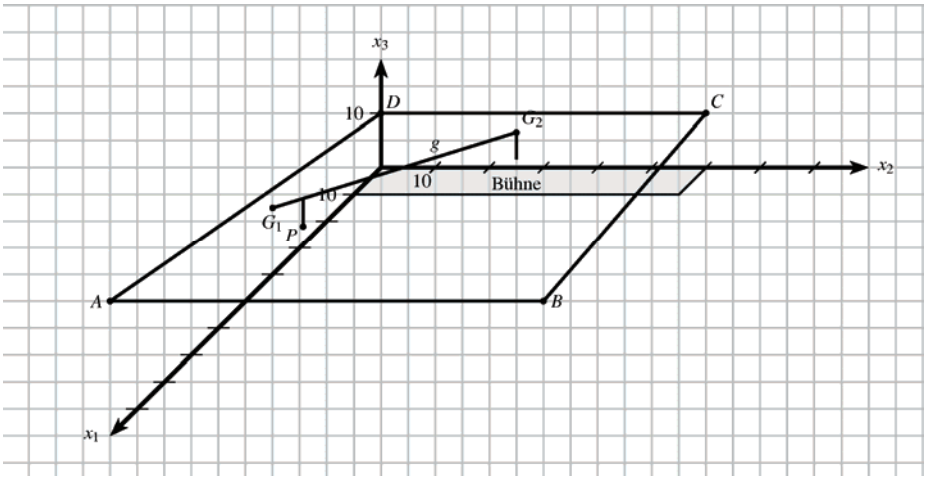
Unter der Theaterdecke befindet sich auch eine Art Baumhaus, das von den Darstellern in einzelnen Szenen genutzt wird. Dieses Baumhaus kann als Kugel mit dem Radius 1,8 m und dem Mittelpunkt $M(15|20|8)$ angesehen werden. Aus Sicherheitsgründen darf sich die Kugel nicht im „Durchfahrtsbereich“ von Tarzan [siehe Aufgabenteil e)] befinden.

f)
- Ermitteln Sie den Abstand der Kugel zu der Ebene, die das Seil bei der Bewegung an der Schiene entlang beschreibt.
- Beurteilen Sie, ob dieser Abstand im Hinblick auf Sicherheitsaspekte ausreicht. (20P)

Anlage zur Aufgabe „Konzerthalle“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	*Diese Zeichnung/Skizze gilt für a), c) und e):*  *a) Zeichnung des Daches* *c) Skizze der Schiene g zwischen G_1 und G_2* *e) Skizze des Seiles oberhalb von P und unterhalb von G_2*	10		
b)	Eine mögliche Lösung ist die Beschreibung durch die Punkte *D*, *C* und *A*: $E\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OD} + \lambda \cdot \overrightarrow{DC} + \mu \cdot \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$ für λ und $\mu \in \mathbb{R}$. Der Punkt *B* ist Teil der Ebene, wenn die Gleichung $\begin{pmatrix} 80 \\ 70 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$ für λ und μ lösbar ist. Für die erste und dritte Zeile gilt $\mu = 1$ und damit in Zeile 2: $70 = 60\lambda - 10$, so dass $\lambda = \frac{4}{3}$. Also ist auch der Punkt *B* in der Ebene enthalten. *Entsprechende Lösungen ergeben sich mit anderen gewählten Punkten zur Beschreibung der Ebene E. Auch ein Lösungsweg mit einer Koordinatengleichung ist zulässig.*	5	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	Die Schienen liegen in der Dachebene, wenn es unendlich viele Lösungen für das Gleichungssystem $\left\vert \begin{array}{c} 40-32t=80\mu \\ 29t=60\lambda-10\mu \\ 12{,}5-2t=10+5\mu \end{array} \right\vert$ gibt. Die Umwandlung in $\left\vert \begin{array}{c} 40=80\mu+32t \\ 0=60\lambda-10\mu-29t \\ 2{,}5=5\mu+2t \end{array} \right\vert$ zeigt, dass Gleichung 1 das 16-fache von Gleichung 3 ist. Umformung von 1 (oder 3) ergibt μ = 0,5 – 0,4*t*. Einsetzen in Gleichung 2 ergibt dort $\lambda=\frac{1}{12}+\frac{5}{12}t$. Das bedeutet, dass es zu jedem $t\in[0;1]$ der Geraden *g* Wertepaare (λ, μ) gibt, die das Gleichungssystem erfüllen. Also ist jeder Punkt der Schiene *g* auch Punkt der Ebene *E*. *Alternative Lösungswege sind möglich:* *Zwei Punkte der Strecke liegen in der Ebene, also auch die gesamte Strecke.* *Oder: Einsetzen der Geradengleichung in die Koordinatengleichung der Ebene und Lösen der entstehenden linearen Gleichung.* Die Skizze für die Schiene ist eine Strecke zwischen den Punkten G_1 und G_2, die sich aus *t* = 0 und *t* = 1 ergeben. Sollte der Prüfling die Schiene deutlich über diese Punkte hinaus zeichnen, dann ist dies mit Punktabzug zu bewerten.	5	15	5
d)	Der Schnittpunkt zweier Geraden (hier Strecken) kann durch Gleichsetzen ermittelt werden. Dieser Ansatz führt zum Gleichungssystem $\left\vert \begin{array}{c} 40-32t=40-16s \\ 0+29t=43{,}5 \\ 12{,}5-2t=12{,}5-s \end{array} \right\vert$. Die Gleichung 2 ergibt *t* = 1,5. Da die Gleichungen 1 und 3 zu *s* = 2*t* führen, ist *s* = 3. Da $t\in[0;1]$ und $s\in[0;2]$, liegt der Schnittpunkt der beiden Geraden außerhalb des festgelegten Bereichs für die Strecken, also treffen sich die Schienen nicht. <u>Eine alternative Lösung</u> ergibt sich durch Skizzieren von *h*. Wenn *h* als Strecke zwischen den beiden Punkten gezeichnet wird, die sich für *s* = 0 und *s* = 2 ergeben, dann gibt es in der Grafik keinen Schnittpunkt. Sollte der Prüfling für die Schienen die Geraden zeichnen, die sich treffen, so kann er noch argumentieren, dass sich der Treffpunkt außerhalb des Daches befindet und sich die Schienen daher nicht wirklich treffen (sondern nur die Geraden).		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	In der Anlage muss der Punkt P skizziert werden. Die lotrechte Verbindung zur Geraden g ergibt eine Seillänge von etwa 5 m. Rechnerisch gilt: Mit der Vorgabe des Punktes $P(36 \mid 3{,}625 \mid 7)$ lässt sich der Parameter t der Parametergleichung für g zu $t = 0{,}125$ bestimmen. Das Seil ist demnach oberhalb von P in der Höhe $x_3 = 12{,}25$ m angebracht [Punkt $Q(36 \mid 3{,}625 \mid 12{,}25)$]. Die Seillänge ist demnach 5,25 m. Auch am Ort des Schienenendes, also bei $t = 1$, hängt das Seil 5,25 *m* herab. Der Bühnenaufbau unterhalb des Punktes $G_2(8 \mid 29 \mid 10{,}5)$ für $t = 1$ muss demnach 10,5 m – 5,25 m = 5,25 m hoch aufgebaut werden.	5	10	
f)	Die Durchfahrtsebene E_2 des Seils kann mit der Geradengleichung für g und dem zweiten Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden. Dann gilt: $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 12{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -32 \\ 29 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ (oder auch $t \in [0;1]$ und $r \in [0;5{,}25]$). Zur Ermittlung des Abstandes wird der Normalenvektor der Ebene E_2 benötigt. Aus $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} -32 \\ 29 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ folgt $n_3 = 0$ sowie $29\, n_2 = 32\, n_1$. Somit wäre eine Lösung $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 32 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Die Ermittlung des Normalenvektors mithilfe des Vektorproduktes ist ebenfalls erlaubt.* Berechnung des Abstandes: <u>1. Lösung</u> (über die Abstandsformel): $d = \left\| \left(\begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 12{,}5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ 32 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{29^2 + 32^2}} \right\| = 1{,}968...$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	<u>2. Lösung</u>: Die Gerade $k: \vec{x} = \overrightarrow{0M} + q \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ 32 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ 32 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird mit der Ebene E_2 zum Schnitt gebracht. Der Abstand des Schnittpunktes zum Punkt M ist der Abstand des Kugelmittelpunktes M von der Ebene E_2. Aus dem LGS $\left\vert \begin{matrix} 40 - 32t = 15 + 29q \\ 29t = 20 + 32q \\ 12{,}5 - 2t - r = 8 \end{matrix} \right\vert$ ergeben sich die Lösungen $t = \frac{276}{373} \approx 0{,}7399$ und $r = \frac{2253}{746} \approx 3{,}0201$ sowie $q = \frac{17}{373} \approx 0{,}0456$. Damit ergibt sich der Schnittpunkt $\overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{17}{373} \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ 32 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6088}{373} \\ \frac{8004}{373} \\ 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 16{,}32 \\ 21{,}46 \\ 8 \end{pmatrix}$. Der Abstand zwischen dem Mittelpunkt und der Ebene ist dann $\left\vert \overrightarrow{MS} \right\vert = \sqrt{(16{,}32 - 15)^2 + (21{,}46 - 20)^2} = 1{,}968...$. Der Abstand von etwa 1,97 m ist größer als der Radius von 1,8 m, doch die Kugeloberfläche ist somit nur etwa 17 cm von der Ebene entfernt. Sicherheitsaspekte können hier ähnlich wie bei „Flugzeug-Aufgaben“ angeführt werden. Auf jeden Fall ist der Darsteller von Tarzan nicht so schmal wie das Seil. Zusätzlich könnte der Darsteller längs seiner Bahn Schwingungen ausführen oder das Baumhaus könnte in seiner Position schwanken. Der Abstand zwischen dem Baumhaus und der Durchfahrtsebene des Seiles beträgt nur etwa 17 cm und ist unter den genannten Aspekten zu klein. Die Position des Baumhauses muss daher noch verändert werden.		5	15
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

LA/AG 2

II.2 Lachse

Der atlantische Lachs hält sich als erwachsenes Tier in den küstennahen Gewässern von Nord- und Ostsee auf. Hier ernährt er sich räuberisch von anderen Fischen. Der Lachs ist ein Wanderfisch. Früher wurden Lachse in großen Mengen auf ihren Laichwanderungen gefangen, oft bevor sie sich fortpflanzen konnten. Dies war auch mit ein Grund für den Zusammenbruch der Lachsbestände.

Zur Fortpflanzung wandern die atlantischen Lachse im Frühsommer aus dem Meer wieder in ihre Heimatgewässer zurück. Bei dieser Wanderung können sie bis zu 2 m hohe Hindernisse überspringen.

Anfang November bis Ende Februar erreichen sie ihre Laichgebiete in den Oberläufen der großen Flüsse. Hier legt das Weibchen an verschiedenen Stellen ca. 5000 bis 20000 Eier ab, die von mehreren Männchen befruchtet werden. Nach dem Laichstress sterben die meisten Elterntiere ab. Weniger als 10 % wandern wieder zurück, um im nächsten Jahr eine zweite Laichwanderung zu unternehmen. Eine dritte Laichwanderung können nur weniger als 0,1 % der Lachse durchführen. Je nach Wassertemperatur schlüpfen die Larven nach 80 bis 210 Tagen. Die kleinen Junglachse (Parrs) färben sich nach 1 bis 5 Jahren mehr und mehr silbern und wandern, nun Smolts genannt, in das Meer ab. Im Meer werden sie nach 1 bis 4 Jahren fortpflanzungsfähig.

Die Entwicklung der *weiblichen* Lachspopulation in einem Fluss soll durch folgende Leslie-Matrix beschrieben werden.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6000 & 7000 \\ 0{,}001 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}05 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Stellen Sie die Leslie-Matrix in einem Übergangsgraphen dar, verwenden Sie dazu die Klassen Eier (E), Parr (P), Smolt (S), erwachsene Erstlaicher (1L), erwachsene Zweitlaicher (2L). (10P)

b)
- Interpretieren Sie die Bedeutung der Einträge 6000, 0,4 und 0,05 in der Matrix.
- Geben Sie an, auf welche Formulierungen des obigen Textes sich diese drei Einträge jeweils beziehen und beurteilen Sie, ob sie den Sachverhalt angemessen wiedergeben. (20P)

Im Rhein und seinen Nebenflüssen waren die Lachse in den 1950er Jahren ausgestorben, z.B. aufgrund von unüberwindbaren Staudämmen. Ein lokaler Politiker macht folgendes Wahlversprechen: In einem Nebenfluss des Rheins wird eine Fischleiter um einen Staudamm herum gebaut und 1000 weibliche Lachse sowie eine hinreichend große Anzahl von männlichen Lachsen werden wieder angesiedelt. Bei dem Aussetzen der Lachse wurden diese nicht mehr gezählt. Ein lokaler Umweltverband zweifelt daran, ob wirklich 1000 weibweibliche Lachse ausgesetzt wurden, zumal im nächsten Jahr nur 602 weibliche Lachse gezählt wurden. Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass keine Zweitlaicher ausgesetzt wurden.

c)
- Ermitteln Sie mit dem Modell aus Aufgabenteil a) für den ausgezählten Populationsbestand $\vec{u}_1 = (e \mid 460 \mid 138 \mid 0 \mid 4)$ den Bestand des Vorjahres und den Parameter *e*.
- Entscheiden Sie, ob das Versprechen eingehalten wurde.
- Interpretieren Sie, warum der erste Eintrag des Vektors nur in Form eines Parameters *e* angegeben ist. (25P)

In einem weiteren Nebenfluss des Rheins gibt es schon seit einiger Zeit wieder Lachse. Stichprobenartig werden die Bestände der einzelnen Klassen ausgezählt und auf folgende Population der weiblichen Lachse geschlossen: $\vec{v}_0 = (10000 \mid 1500 \mid 300 \mid 100 \mid 5)$

d) Berechnen Sie mithilfe der Matrix L die Populationsvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ für die nächsten zwei Jahre. (10P)

Der mögliche Erfolg der Lachsansiedelung soll abgeschätzt werden. Eine Simulation mittels *L* hat folgende Bestände für die Parrs ergeben.

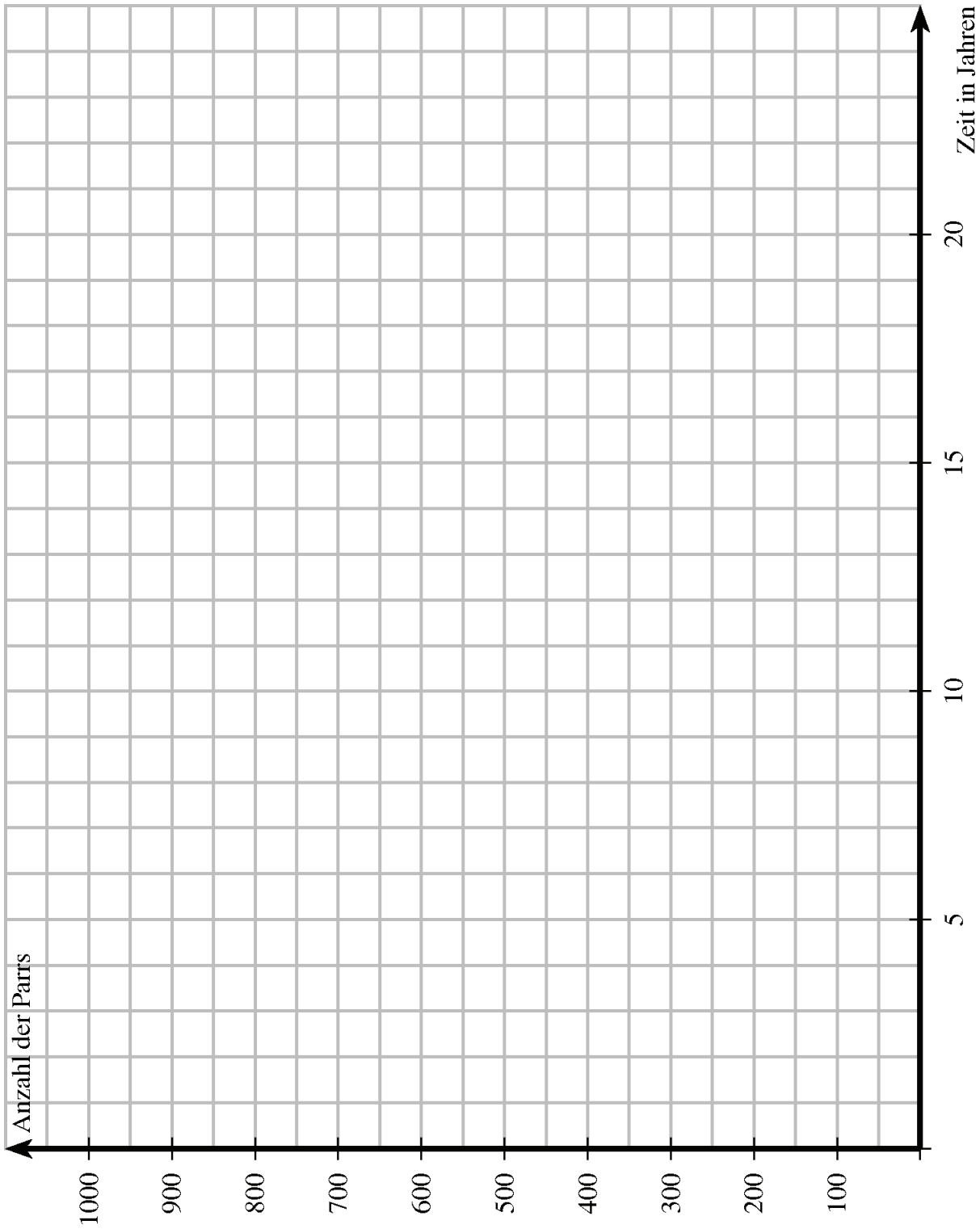
Jahr	1	2	3	4	5	10	15	20
Anzahl Parrs	aus d)		903	886	770	527	357	242

e) Zeichnen Sie in das beiliegende Koordinatensystem die Punkte ein und untersuchen Sie das Langzeitverhalten der Population. Bestimmen Sie für die Anzahl der Parrs einen mittleren Wachstumsfaktor auf drei Nachkommastellen genau für den Zeitraum 5. bis 20. Jahr und ermitteln Sie, wann voraussichtlich ein Bestand von 50 Parrs erreicht wird. (20P)

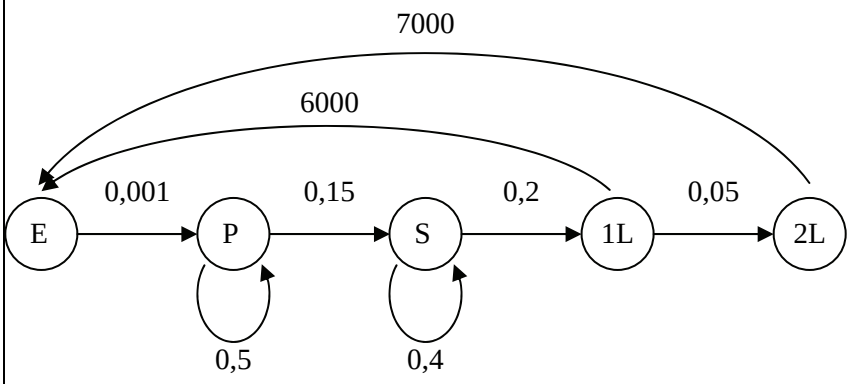
Leider reduziert ein Umweltskandal im Laichgebiet der Lachse am Anfang des dritten Jahres im Bestand $\vec{v}_3 = (435000 \mid 903 \mid 253 \mid 50 \mid 3)$ die Anzahlen der Parrs und der laichenden Lachse um jeweils 20 %. Die Matrix *H* soll ausschließlich die Reduzierung durch den Umweltskandal beschreiben und noch nicht den Übergang zum nächsten Jahr beinhalten.

f) Geben Sie die Matrix *H* an. Berechnen Sie dann $L \cdot H$ und $L \cdot H \cdot \vec{v}_3$ und interpretieren Sie die Bedeutung der beiden berechneten Ergebnisse. (15P)

Anlage zur Aufgabe „Lachse“



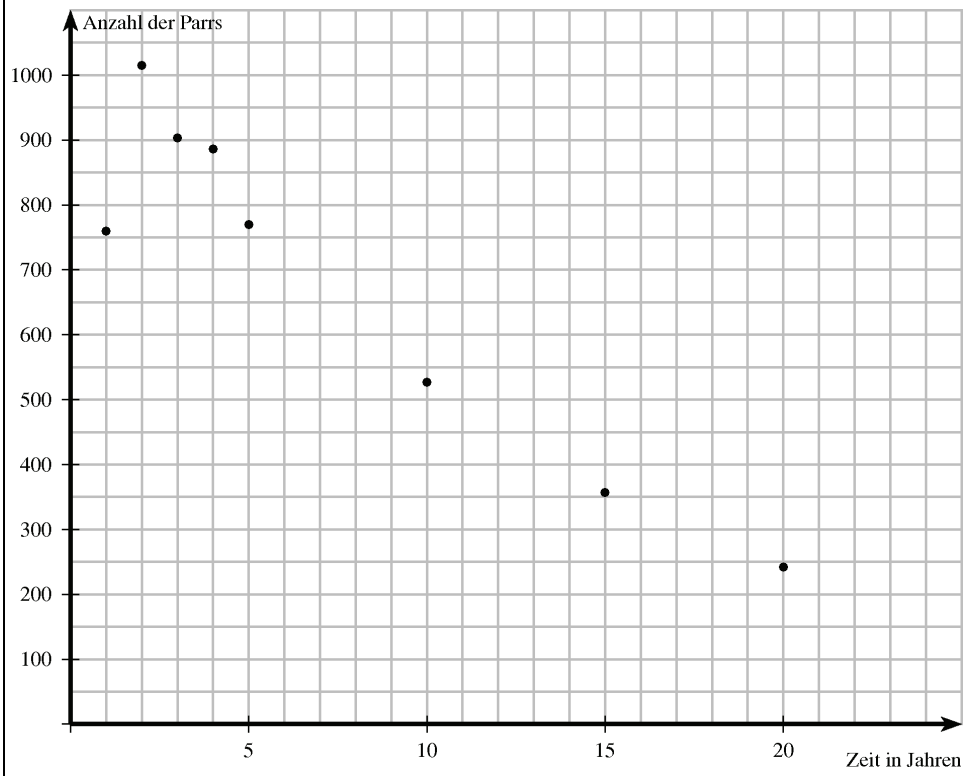
Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)		10		
b)	(siehe unten)	5	15	
c)	$L \cdot \vec{x} = \vec{u}_1$ mit $x_{2L} = 0$ (*2L* steht für Zweitlaicher) $\left\vert \begin{array}{c} 6000x_{1L} + 7000 \cdot 0 = e \\ 0{,}001x_E + 0{,}5x_P = 460 \\ 0{,}15x_P + 0{,}4x_S = 138 \\ 0{,}2x_S = 0 \\ 0{,}05x_{1L} = 4 \end{array} \right\vert \rightarrow \left\vert \begin{array}{c} e = 6000 \cdot x_{1L} \\ x_E = 460\,000 - 500x_P \\ x_P = 920 - \frac{8}{3}x_S \\ x_S = 0 \\ x_{1L} = 80 \end{array} \right\vert$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 920 \\ 0 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e = 6000 \cdot 80 = 480000$			

b)

	Interpretation	Im Text / Beurteilung
6000	Anzahl der Eier, die die Erstlaicher ablegen	6000 liegt im Bereich 2500 bis 10000 Eier je Weibchen (beachte: etwa die Hälfte der Eier entwickeln sich zu Männchen).
0,4	Anteil der Smolts, die im Stadium verbleiben	Smolts wechseln erst nach 1 bis zu 4 Jahren ins nächste Stadium, d.h. es verbleibt ein großer Teil im Smoltstadium.
0,05	Anteil der Erstlaicher, die noch ein zweites Mal laichen	Weniger als 10 % = 0,1 laichen ein zweites Mal.

Damit ist der Text in der Lesliematrix angemessen berücksichtigt.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Das Versprechen wurde eingehalten, siehe 2. und 4. Eintrag des Vektors. Der Parameter e wird verwendet, da die große Anzahl der kleinen Eier praktisch nicht auszählbar ist. Die Anzahl der Eier beträgt e = 480 000.		15	10
d)	$\vec{v}_1 = L \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 635000 \\ 760 \\ 345 \\ 60 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = L \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 395000 \\ 1015 \\ 252 \\ 69 \\ 3 \end{pmatrix}$	10		
e)	 Der Graph scheint sich exponentiell der Zeitachse zu nähern, d.h. die Population scheint nicht überlebensfähig zu sein, denn wenn die Parrs aussterben, gilt dies auch für die gesamte Population. $\frac{A_P(10)}{A_P(5)} = \frac{527}{770} = 0{,}684\ldots$ $\frac{A_P(15)}{A_P(10)} = \frac{357}{527} = 0{,}677\ldots$ $\frac{A_P(20)}{A_P(15)} = \frac{242}{357} = 0{,}677\ldots$			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Der Mittelwert für den Wachstumsfaktor für fünf Jahre beträgt 0,679. *Wenn andere Wertepaare gewählt werden, kann sich ein leicht abweichender Mittelwert ergeben.* $f(t) = a \cdot b^x$ $\frac{f(t+5)}{f(t)} = \frac{a \cdot b^{t+5}}{a \cdot b^t} = 0{,}679$ $b^{t+5-t} = 0{,}679$ $b = \sqrt[5]{0{,}679} = 0{,}925\ldots$ Eine Regression ist nicht gefordert. *a* kann z.B. bestimmt werden mit *f*(15) = 357: $357 = a \cdot 0{,}925^{15}$ $a = 1150$ Bestand: $f(t) = 50$ $1150 \cdot 0{,}925^t = 50$ $t = \frac{\ln\left(\frac{50}{1150}\right)}{\ln(0{,}925)} = 40{,}21\ldots$ Alternativ kann die Tabelle mit dem mittleren 5-Jahres-Wachstumsfaktor 0,679 fortgesetzt werden:			

Jahr	25	30	35	40	45
Anzahl Parr	164	112	76	51	35

	Der Bestand von 50 würde voraussichtlich nach etwa 40 Jahren erreicht.	5	10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	$H=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0{,}8&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0{,}8&0\\0&0&0&0&0{,}8\end{pmatrix}$ $L\cdot H=\begin{pmatrix}0&0&0&4800&5600\\0{,}001&0{,}4&0&0&0\\0&0{,}12&0{,}4&0&0\\0&0&0{,}2&0&0\\0&0&0&0{,}04&0\end{pmatrix}$ $L\cdot H\cdot\vec{v}_3=(256800\,\vert\,796{,}2\,\vert\,209{,}56\,\vert\,50{,}6\,\vert\,2)^T$ sinnvoll gerundet: $\vec{v}_4=(256800\,\vert\,796\,\vert\,210\,\vert\,51\,\vert\,2)$ $L\cdot H$ beschreibt die Reduzierung durch den Umweltskandal und beinhaltet auch den anschließenden Übergang zum nächsten Jahr. Mit $L\cdot H\cdot\vec{v}_3$ wird die Population zu Beginn des vierten Jahres unter Berücksichtigung des Umweltskandals berechnet.		10	5
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

STOCHASTIK 1

III.1 Anschnallquote

Seit 1984 gibt es in Deutschland die Anschnallpflicht, das heißt die Pflicht für Fahrzeuginsassen, die vorgeschriebenen Gurte während der Fahrt anzulegen, anderenfalls droht ein Bußgeld und im Falle eines Unfalls ein zumindest teilweiser Verlust des Versicherungsschutzes.

Wie gut dieses Gebot in der Praxis eingehalten wird, drückt sich in der Anschnallquote aus, die den Anteil der während der Fahrt angeschnallten Autofahrer (an allen Autofahrern) angibt.

Werte für diese Quote sind schwer zu erhalten; die BASt (Bundesanstalt für das Straßenwesen) veröffentlichte 2004 eine Untersuchung, bei der sie eine Anschnallquote für Fahrer von 94% angab. Nehmen Sie diese Zahl als theoretischen Richtwert in den folgenden Untersuchungen; gehen Sie weiterhin davon aus, dass in dieser Aufgabe nicht zwischen weiblichen und männlichen Fahrzeuglenkern unterschieden wird: „Fahrer“ bezieht sich auf beide Geschlechter.

a) Berechnen Sie unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
A – Unter zehn beobachteten Fahrern fuhr genau ein Fahrer nicht angeschnallt.
B – Von 20 beobachteten Fahrern hatten alle den Gurt angelegt.
C – Unter zwanzig beobachteten Fahrern waren höchstens achtzehn angeschnallt. (15P)

b)
- Bestimmen Sie die Zahl der Fahrzeuge, die beobachtet werden müssen, bis die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen nicht angeschnallten Fahrer zu beobachten, auf über 99% gestiegen ist.
- Sie beobachten einen nicht angeschnallten Fahrer.
  Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die nächsten fünfzehn Fahrer angeschnallt sind.
- Entscheiden Sie durch Rechnung, ob die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Nach fünfzehn angeschnallten Fahrern kommt ein nicht angeschnallter Fahrer“ mit der eben bestimmten Wahrscheinlichkeit gleich ist. (20P)

c)
- Ermitteln Sie für 400 beobachtete PKW den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Anzahl der angeschnallten Fahrer.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 400 Fahrern nicht mehr als 10 nicht angeschnallt sind. (15P)

Ein Hinweis zur Verkehrsdichte: Auf einer stark befahrenen Autobahn passieren pro Tag 100 000 Autos einen bestimmten Beobachtungspunkt, auf einer stark befahrenen Bundesstraße 40 000 Autos pro Tag, auf einer stark befahrenen vierspurigen Stadtstraße 25 000 Autos pro Tag.

d) Auf Nachfrage sagt die BASt, dass ihre Aussage zur Anschnallquote genauer „(94±1)% aller Fahrzeuglenker fahren angeschnallt“ lautet. (Man sagt dann, die Aussage ist auf 1 % sicher.)
Als Gleichung bedeutet dies: $\frac{\sqrt{n \cdot 0{,}94 \cdot (1-0{,}94)}}{n} = 0{,}01$.

- Leiten Sie diese Gleichung im Kontext der Aussage her.
- Ermitteln Sie die Mindestgröße der Stichprobe, die die BASt gezählt haben muss, um ihre Aussage zur Genauigkeit vertreten zu können.
- Berechnen Sie auch den notwendigen Umfang, den eine Stichprobe haben müsste, damit die daraus gewonnene Aussage auf 0,1% sicher ist.
- Beurteilen Sie Ihre Resultate in Hinblick auf realistische Stichprobengrößen. (20P)

Bei einer Ermittlung der Anschnallquote auf der Autobahn (von einer Hamburger Brücke über die A7, Fahrtrichtung Süden) durch eine Schülergruppe wurden bei mäßigem Verkehr tagsüber insgesamt 1800 PKWs beobachtet und bezüglich des angelegten Gurts bewertet. Dieses Experiment dauerte etwa 80 Minuten; Taxis und unklare Beobachtungen flossen nicht in die Statistik ein.
Es ergab sich, dass 1669 Fahrzeuglenker angeschnallt waren.

e) Begründen Sie, warum dieses Experiment als Bernoulli-Experiment betrachtet werden kann.
Berechnen Sie die Standardabweichung bei diesem Experiment.
Sie vergleichen jetzt das Resultat des Experiments mit der BASt-Untersuchung. Sie machen einen Hypothesentest mit der Hypothese „Die BASt-Untersuchung entspricht den Tatsachen.“ Zugleich stellen Sie fest, dass das Resultat des Experiments die BASt-Studie nicht gut unterstützt.
Untersuchen Sie, wie groß der Sicherheitsbereich gewählt werden musste, damit aufgrund des Experiments die Hypothese noch abgelehnt werden konnte. (20P)

f) In der Beschreibung der Ermittlung durch die Schülergruppe wurde Wert darauf gelegt, dass sie „bei mäßigem Verkehr tagsüber“ durchgeführt wurde und „etwa 80 Minuten“ gedauert hat.
Begründen Sie, warum dies wesentliche Bedingungen für die Durchführung der Ermittlung waren, vor allem in Hinblick auf die Frage, ob das Experiment ein Bernoulli-Experiment ist. (10P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	$P(A) = 10 \cdot 0{,}94^9 \cdot 0{,}06 \approx 34{,}38\%$ $P(B) = 0{,}94^{20} \approx 29{,}01\%$ Das Ereignis C lässt sich umformulieren zu: Unter 20 Fahrern tritt es nicht auf, dass 19 oder 20 Fahrer angeschnallt sind. Deswegen: $P(C) = 1 - 20 \cdot 0{,}94^{19} \cdot 0{,}06 - P(B) \approx 33{,}95\%$.	15		
b)	$1 - 0{,}94^n \geq 0{,}99 \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 75$. Hier ist zunächst danach gefragt, dass 15 angeschnallte Fahrer hintereinander kommen. Dafür ist die Wahrscheinlichkeit $p_{15} = 0{,}94^{15} \approx 39{,}53\%$. (Der nicht angeschnallte Fahrer am Anfang ist die Voraussetzung, seine Wahrscheinlichkeit spielt wegen der anzunehmenden stochastischen Unabhängigkeit keine Rolle!) Dann aber wird nach „15 mal angeschnallt, danach einmal nicht angeschnallt“ gefragt. Hierfür ist die Wahrscheinlichkeit $p_{15+1} = p_{15} \cdot 0{,}06 \approx 2{,}37\%$. Da hier der nicht angeschnallte Fahrer in die Berechnung eingeht, sind die Wahrscheinlichkeiten verschieden.	5	15	
c)	$\mu = 400 \cdot 0{,}94 = 376$; $\sigma \approx 4{,}7497 > 3$, also ist die Laplace-Bedingung erfüllt. „Es sind nicht mehr als zehn Fahrer nicht angeschnallt“ bedeutet: Mindestens 390 Fahrer sind angeschnallt, also 14 mehr als erwartet – oder drei Standardabweichungen mehr als erwartet. Eine Abschätzung mit der Normalverteilung für eine einseitige Abweichung von drei Standardabweichungen ergibt eine Wahrscheinlichkeit von $P \approx 0{,}9987$; bei einer genaueren Berechnung mit Hilfe der Normalverteilungsnäherung ergibt sich $P = \Phi\left(\frac{389{,}5 - \mu}{\sigma}\right) \approx 0{,}9978$. Anders ausgedrückt: Die gesuchte Wahrscheinlichkeit liegt nur etwa 2 Promille unter 1.		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Zur Herleitung der angegebenen Formel: Der Term $\sqrt{n \cdot 0{,}94 \cdot (1-0{,}94)}$ beschreibt die (absolute) Standardabweichung einer binomialverteilten Größe vom Umfang *n* mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}94$. Möchte man diesen Wert auf 100% beziehen, also die relative Standardabweichung erhalten, muss die Standardabweichung durch den Umfang *n* geteilt werden. Zu lösen ist $\frac{\sqrt{n \cdot 0{,}94 \cdot (1-0{,}94)}}{n} = 0{,}01 \quad \Rightarrow n = 564$ bzw. $\frac{\sqrt{n \cdot 0{,}94 \cdot (1-0{,}94)}}{n} = 0{,}001 \quad \Rightarrow n = 56400$ Da schwerlich wesentlich mehr als einige tausend Fahrzeuge gezählt werden können (siehe Hinweis), ist die Genauigkeit einer Aussage über die Anschnallquote bestenfalls etwa $\pm 0{,}5\%$ – oder es müssten etliche „Messungen“ zusammengeführt werden, was wiederum die Frage nach der Vergleichbarkeit der „Messbedingungen“ aufwirft. Die Genauigkeitsaussage der BASt ist jedenfalls plausibel.	5	10	5
e)	Es ist mit höchster Plausibilität davon auszugehen, dass die Entscheidung, sich anzuschnallen, von jedem Fahrzeugführenden unabhängig von allen anderen getroffen wird; da es zudem genau zwei Möglichkeiten gibt (nämlich angeschnallt – nicht angeschnallt), sind die Voraussetzungen für ein Bernoulli-Experiment gegeben. $\sigma_{Experiment} = \sqrt{1800 \cdot \frac{1669}{1800} \cdot \frac{131}{1800}} \approx 11{,}0212$ In diesem Teil ist das Vorgehen mit Hilfe der Normalverteilungsnäherung mit einem zweiseitigen Test sinnvoll. Der Erwartungswert der BASt-Studie ist $E = 1800 \cdot 0{,}94 = 1692$, die Standardabweichung ist dann $\sigma \approx 10{,}08$. Somit liegt dieser Erwartungswert um $2{,}0869\sigma \approx 2{,}1\sigma$ über dem Ergebnis der Ermittlung. Der Bereich der Normalverteilung $(E \pm 2{,}0869\sigma)$ hat eine Wahrscheinlichkeit von $P \approx 96{,}3\,\%$. Also: Nur knapp 4 % aller äquivalenten Stichproben würden ähnlich weit bzw. weiter abweichen – ein Widerspruch der eigenen Ermittlung zum BASt-Ergebnis ist mit hohem Signifikanzniveau anzunehmen, der Fehler 1. Art liegt zweiseitig bei etwa 4 %, einseitig entsprechend bei etwa 2 %. Somit liegt der anzunehmende Sicherheitsbereich bei gut 96 %, in Standardabweichungen bei etwa $2{,}1\sigma$.	5	5	10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Es könnte einen tageszeitbedingten Gang geben: Mit Sicherheit ist das Verhältnis zwischen Fernreisenden und lokalem Verkehr im Verlauf des Tages wechselnd, und bei Kurzstreckenfahrten ist vermutlich die Anschnallquote geringer. Diese Effekte gehen durch das relativ kurze Zeitfenster von 80 Minuten nicht in die Beobachtung ein, so dass von einer konstanten Anschnallquote in dem Beobachtungszeitraum ausgegangen werden kann. Die konstante Anschnallquote führt zu konstanten Wahrscheinlichkeiten über den Beobachtungszeitraum, daher ist ein Bernoulli-Experiment angemessen. Eine höhere Fahrzeugdichte macht die Beobachtung der einzelnen Fahrzeuge schwerer; hierbei ergibt sich eine Beobachtungsselektion (Bias) zugunsten gewisser Fahrzeugtypen und gegen Fahrzeuge, die dichter auffahren, auch hinter LKWs. Dunkelheit erschwert ein Erkennen des angelegten Gurts entscheidend, wobei auch hier ein Bias zugunsten einiger Typen auftritt. Weitere Argumente sind denkbar.		5	5
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

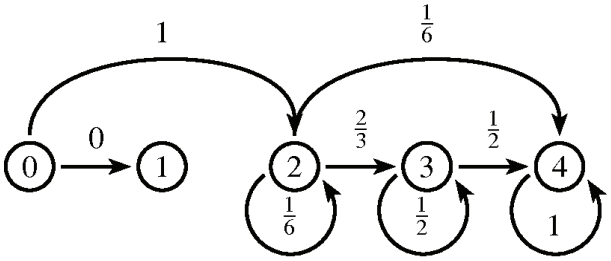
STOCHASTIK 2

III.2 Marketing

Zur Fußball-Weltmeisterschaft in Südafrika wurden von allen teilnehmenden Nationalmannschaften Klebebilder verkauft, die in einem Album gesammelt werden konnten. Ein bekannter Limonadenhersteller hat sich eine Seite dieses Sammelalbums gesichert, um dort sogenannte „Torjubelbilder“ sammeln zu lassen. Diese Bilder wurden beim Verkauf einer Kiste einer besonderen Limonade in einer Tüte an den Käufer gegeben. In dieser Aufgabe sollen Aspekte dieser Marketingmaßnahme betrachtet werden.

Es gibt insgesamt vier verschiedene Torjubelbilder.

Alle Bilder werden gleich häufig gedruckt, und in einer Tüte sind **zwei verschiedene** Torjubelbilder enthalten. Wie viele Tüten man sammeln muss, bis die Seite mit allen Bildern voll ist, hängt vom Zufall ab. Das Sammeln der Bilder kann als zufälliger Prozess mit fünf möglichen Zuständen betrachtet werden. Zustand ***i*** bedeutet, dass man unter den bereits gesammelten Bildern ***i*** verschiedene Bilder hat. Der folgende Übergangsgraph zeigt die Wahrscheinlichkeiten, von einem Zustand in einen anderen zu gelangen:



a) Geben Sie die möglichen Bilderkombinationen in den Tüten an und bestätigen Sie die Wahrscheinlichkeiten im Übergangsgraphen. (15P)

b)
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Kauf von vier Kästen (mit vier Tüten) das Bild 4 noch nicht dabei ist.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in den vier Tüten eines von vier Bildern nicht dabei ist. (10P)

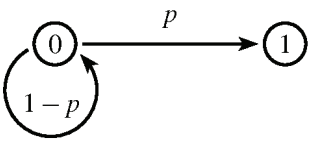
In einer Kleinstadt gibt es drei große Getränkemärkte mit einem ähnlichen Angebot: *Getränkehof*, *Limotheke* und *Saftladen*. Einer dieser Getränkemärkte, der *Saftladen*, hat sich die Rechte zur Durchführung der Werbemaßnahme mit zwei Sammelbildern pro Tüte gesichert. Eine Woche nach dem Start der Werbeaktion wird eine Untersuchung zur Kundenwanderung durchgeführt. Dabei hat sich Folgendes ergeben:

- 65 % der Kunden vom *Getränkehof* kauften auch in der Folgewoche dort ein. Dagegen sind 20 % zur *Limotheke* und 15 % zum *Saftladen* abgewandert.
- Der *Limotheke* blieben 55 % der Kunden auch in der Folgewoche treu, doch 25 % sind zum *Saftladen* und 20 % zum *Getränkehof* abgewandert.
- Der *Saftladen* hatte sogar einen Anteil von 70 % der Kunden, die auch in der Folgewoche dort einkauften. Die anderen Kunden teilten sich gleichmäßig auf den *Getränkehof* und die *Limotheke* auf.

In der untersuchten Woche kauften 3 000 Personen beim *Getränkehof*, 3 600 Personen bei der *Limotheke* und 2 800 Personen beim *Saftladen*.

c)
- Stellen Sie die Kundenwanderung mit einem Übergangsgraphen dar und bestimmen Sie die zu erwartende Kundenverteilung in der Folgewoche.
- Beurteilen Sie, ob schon nach einer Woche von einer erfolgreichen Werbemaßnahme gesprochen werden kann.
- Beurteilen Sie ferner, ob dies auch für die darauf folgenden Wochen gilt. (20P)

Die Konkurrenz plant nun für die nächste Europameisterschaft ähnliche Aktionswochen. Es wird davon ausgegangen, dass die Käufer pro Woche eine Limonadenkiste kaufen. In jeder Tüte soll es nur noch ein besonderes Bild geben, aber insgesamt ebenfalls vier Bilder der Stürmer Miro, Mario, Steffen und Lukas. Auch diese Bilder werden in gleicher und sehr großer Anzahl gedruckt. Um den Erwartungswert für die Anzahl der Tüten zu bestimmen, die notwendig sind, um das Bild von Lukas zu erhalten, kann ein Übergangsgraph mit den Zuständen 0 und 1 gezeichnet werden.



Dann lässt sich die Anzahl a für den oben genannten Erwartungswert mit der folgenden Formel bestimmen:

$$a = p \cdot 1 + (1-p) \cdot (a+1).$$

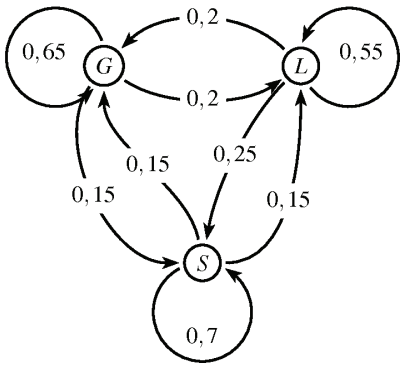
d)
- Begründen Sie die Formel und zeigen Sie, dass $a = \frac{1}{p}$ ist. Geben Sie den Wert a an.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Kauf von vier Tüten das Bild von Lukas noch nicht dabei ist.
- Vergleichen Sie dieses Resultat mit dem entsprechenden Resultat aus b). (25P)

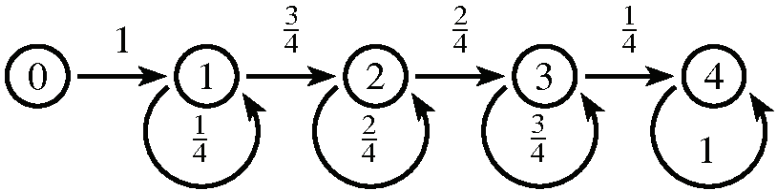
e)
- Zeichnen Sie den Übergangsgraphen mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten für alle Zustände 0, 1, 2, 3 und 4, wobei z.B. Zustand 3 bedeutet, dass drei verschiedene Bilder gesammelt sind.
- Ermitteln Sie nun die Wahrscheinlichkeit, dass in vier Tüten genau drei verschiedene Bilder sind, und vergleichen Sie dies mit dem entsprechenden Ergebnis aus b). (15P)

f)
- Ermitteln Sie die zu erwartende Anzahl der Tüten, die man kaufen muss, um alle Bilder zu erhalten.
- Interpretieren Sie Ihr Ergebnis hinsichtlich der anzusetzenden Dauer der Werbeaktion. (15P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Es gibt sechs verschiedene Kombinationen: 1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-4. Der Wert 1 bedeutet, dass der folgende Zustand mit Sicherheit erreicht wird. Dies gilt einerseits für den Endzustand – wenn alle Bilder gesammelt sind, bleibt der Prozess stabil im Zustand 4 – und andererseits für die erste Tüte: Der Sammler hat sofort zwei verschiedene Bilder. Demnach kann der Zustand 1 nicht erreicht werden, und der dortige Übergang hat die Wahrscheinlichkeit 0. Der Wert $\frac{1}{6}$ ergibt sich von 2 nach 2, weil eine von sechs möglichen Tüten die gleichen Bilder enthält. Wiederum eine von sechs Tüten enthält die beiden anderen Bilder, so dass der Übergang von 2 nach 4 ebenfalls die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ hat. So bleibt für den Übergang von 2 nach 3 die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$, denn vier von sechs Tüten enthalten genau ein neues Bild. Wenn der Zustand 3 erreicht ist, erhält man mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ aus der nächsten Tüte ein neues Bild, denn drei von sechs Tüten enthalten jeweils ein beliebig vorgegebenes Bild.	5	10	
b)	Es wurde viermal „gezogen“. • Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bild 4 noch nicht dabei ist? $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}=0{,}0625$, denn es gibt sechs verschiedene Arten von Tüten und in drei von diesen gibt es das Bild 4 – also ist in jeder Tüte zu 50 % ein Bild 4. • Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgendein Bild noch nicht dabei ist? Es muss die Wahrscheinlichkeit ermittelt werden, nach viermaligem Ziehen noch in Zustand 3 zu sein. Dabei sind folgende Zustandswege möglich: 2223, 2233, 2333. Für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten gilt: $1\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{54}\approx 0{,}24$. *Sollte ein Prüfling diesen zweiten Aufgabenteil mit Hilfe von Matrixrechnungen lösen, so ist dies ebenfalls voll anzuerkennen. (Der Rechenaufwand ist erheblich größer.)*		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	Übergangsgraph:  Die erwarteten Anzahlen der Kunden für den Getränkehof (g), die Limotheke (l) und den Saftladen (s) ergeben sich durch folgende Rechnungen: $g = 0,65 \cdot 3000 + 0,2 \cdot 3600 + 0,15 \cdot 2800 = 1950 + 720 + 420 = 3090$. $l = 0,2 \cdot 3000 + 0,55 \cdot 3600 + 0,15 \cdot 2800 = 600 + 1980 + 420 = 3000$ $s = 0,15 \cdot 3000 + 0,25 \cdot 3600 + 0,7 \cdot 2800 = 450 + 900 + 1960 = 3310$ Für den Saftladen hat sich die Anzahl der Kunden stark erhöht. Insofern könnte die Maßnahme als erfolgreich bezeichnet werden, aber es ist nicht sicher, dass diese Entwicklung sich über einen längeren Zeitraum so fortsetzen lässt. Es könnte auch eine zufällige Verschiebung von Kunden für die Untersuchungsergebnisse verantwortlich sein. Es ist außerdem nicht sicher, ob die Gesamtzahl der Kunden konstant bleibt.	5	10	5
d)	• Begründung: Vom Zustand 0 werden *a* Schritte bis zum Ziel Zustand 1 benötigt. Dieser Wert *a* wird gesucht („*Wartezeit*“). Mit der Wahrscheinlichkeit *p* benötigt man einen Zug, um das Ziel zu erreichen. Daher muss *p* mit 1 multipliziert werden. Mit der Gegenwahrscheinlichkeit (1 – *p*) macht man einen Schritt und ist wieder im Zustand 0, so dass man noch *a* Schritte zum Ziel machen muss. Daher wird (1 – *p*) mit (*a* + 1) multipliziert. Die Summe der beiden Produkte ergibt dann die gesuchte Größe *a* (*Wartezeit*, im Sachkontext Anzahl der notwendigen Tüten). • Umformung: $a = p \cdot 1 + (1-p) \cdot (a+1)$ $a = p + a - p \cdot a + 1 - p$ $p \cdot a = 1$ $a = \frac{1}{p}$ was zu zeigen war. • Wert *a*: Da die Wahrscheinlichkeit, das Bild von Lukas zu erhalten, $p = \frac{1}{4}$ ist, ist der gesuchte Wert *a* = 4.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	• Berechnung: Es wurde erneut viermal „gezogen“. Die Anzahl unterschiedlicher Tüten ist jedoch nur vier, so dass sich die Lösung wie folgt verändert: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Bild von Lukas (*vergleichbar mit Bild 4*) noch nicht dabei ist, beträgt $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{81}{256}\approx 0{,}3164$, denn es gibt in drei der vier verschiedenen Tüten das Bild von Lukas nicht. • Vergleich: Die Wahrscheinlichkeit, nach viermaligem Ziehen das Bild von Lukas nicht dabei zu haben, ist etwa fünfmal so groß wie in b), das Bild 4 nicht zu haben.	10	10	5
e)	• Übergangsgraph:  • Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Bestimmung, nach viermaligem Ziehen noch in Zustand 3 zu sein. Dabei sind folgende Zustandswege möglich: 1123, 1223, 1233 Für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten gilt: $1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{18}{32}=\frac{9}{16}=0{,}5625$. Die Wahrscheinlichkeit, nach viermaligem Ziehen genau drei verschiedene Bilder zu haben, ist mehr als doppelt so groß: 56,3 % gegenüber 24,1 % Wahrscheinlichkeit aus b), dass irgendein Bild noch nicht dabei ist.	5	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Ausgehend vom Zustand 0 soll die erwartete Anzahl der Übergänge bestimmt werden, bis man erstmals im Zustand 4 ist. Die Ermittlung des Erwartungswertes kann unter Ausnutzung des Ergebnisses von Teilaufgabe d) geschehen: Der Erwartungswert für die Anzahl kann dabei Schritt für Schritt als Summe der Kehrwerten der Übergangswahrscheinlichkeiten berechnet werden: $E(0) = \frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{3}{4}}+\frac{1}{\frac{2}{4}}+\frac{1}{\frac{1}{4}}=1+\frac{4}{3}+\frac{4}{2}+\frac{4}{1}=8\frac{1}{3}$. Interpretation: Zu erwarten ist der „vollständige Satz“ bei mehr als 8 Tüten. Wenn die Kunden einmal pro Woche einkaufen, könnte die Aktion mehr als acht Wochen laufen. Eine alternative Lösungsidee besteht darin, nicht nur diesen Erwartungswert zu betrachten, sondern für jeden Zustand ***i*** die erwartete Anzahl ***E(i)*** der Übergänge unter der Bedingung, dass man sich im Zustand ***i*** befindet. Die Beziehungen zwischen diesen Werten erlauben es letztlich, den gesuchten Wert ***E(0)*** zu bestimmen: Es gilt trivialerweise: $E(4) = 0$. Nun können wir $E(3)$ bestimmen, es gilt nämlich nach Definition des Erwartungswertes: $E(3)=0,75\cdot(1+E(3))+0,25\cdot(1+E(4))$ Da $E(4) = 0$ ist, gilt $E(3)=0,75+0,75\cdot E(3)+0,25$ $0,25\cdot E(3)=1$ $E(3)=4$ Ebenso gilt $E(2)=\frac{1+E(2)}{2}+\frac{1+E(3)}{2}=\frac{2+E(2)+4}{2}=3+\frac{E(2)}{2}$, also $E(2) = 6$. $E(1)=\frac{1+E(1)}{4}+3\cdot\frac{1+E(2)}{4}=\frac{22+E(1)}{4}=\frac{11}{2}+\frac{E(1)}{4}$, also $E(1) = \frac{22}{3}$. $E(0) = 1 + E(1) = \frac{25}{3}$.			15
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25