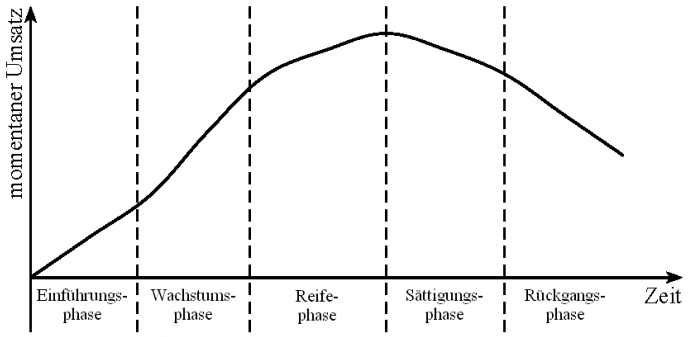
Analysis 1

I.1 USB-Sticks

Die Firma RAM-Dir bringt den neuen USB-Stick „Data 2.0“ auf den Markt.

Das Produkt durchläuft einen Produktlebenszyklus, den man in fünf Phasen unterteilen kann.

Die abgebildete Kurve stellt die Entwicklung des momentanen Umsatzes im Laufe der Zeit graphisch dar.



In der Einführungsphase führt das Unternehmen das Produkt mit Werbung auf dem Markt ein.

In der Wachstumsphase steigt der momentane Umsatz stark, obwohl noch hohe Werbungskosten das Unternehmen belasten.

Die anschließende Reifephase ist die ertragreichste Zeit, sie endet an der Maximumstelle der Funktion des momentanen Umsatzes.

In der Sättigungsphase gehen die momentanen Umsätze zurück, das Produkt hat kein Marktwachstum mehr.

Danach folgt die Rückgangsphase. Am Ende dieser Phase wird die Produktion eingestellt.

Die Firma hat dabei als Vergleich das Vorgängermodell „Data 1“, bei dem sich der momentane Umsatz durch die Funktion f_1 mit der folgenden Gleichung beschreiben ließ:

$$f_1(t) = -\frac{7}{12}t^3 + \frac{13}{3}t^2 + \frac{5}{12}t + \frac{5}{2},$$

dabei steht t für die Zeit seit Produktionsbeginn in Monaten und $f_1(t)$ für den momentanen Umsatz in 1000 € pro Monat.

a) Zeichnen Sie den Graphen von f_1 in das beigefügte Koordinatensystem ein. (10P)

b) Bei der Firma gilt die Einführungsphase eines USB-Sticks als abgeschlossen, wenn der momentane Umsatz einen Betrag von 10 000 € pro Monat überschreitet.

- Geben Sie unter Verwendung Ihres Arbeitsergebnisses aus Teil a) diesen Zeitpunkt für den „Data 1“ an.
- Bestimmen Sie für den „Data 1“ mithilfe der Differentialrechnung die Zeitspanne vom Ende der Einführungsphase bis zum Beginn der Sättigungsphase. (20P)

Nun wird der gesamte Lebenszyklus des Produkts betrachtet. Die Firma nimmt einen USB-Stick vom Markt, wenn der momentane Umsatz auf 1000 € pro Monat sinkt.

c)
- Bestätigen Sie zeichnerisch, dass der Produktlebenszyklus des „Data 1“ rund 7,6 Monate dauerte.
- Ermitteln Sie eine Stammfunktion F_1 zu f_1 mit der Bedingung $F_1(0) = 0$ und interpretieren Sie die Bedeutung von F_1 im Kontext der Aufgabe.
- Bestimmen Sie ohne Rechnung die Wendestelle(n) von F_1.
- Zeigen Sie, dass die Firma mit dem „Data 1“ während seines Lebenszyklus einen Gesamtumsatz von etwa 178 580 € erzielte. (30P)

Damit das neue Produkt einen längeren Lebenszyklus hat, hat die Entwicklungsabteilung mehrere Verbesserungen in den „Data 2.0“ eingebaut. Aufgrund von Marktbeobachtungen erwartet die Firma, dass sie dadurch nach der gleichen Zeitspanne für die ersten drei Phasen eine längere Sättigungsphase erreichen kann. Man geht außerdem davon aus, dass sich der gleiche maximale momentane Umsatz wie beim Vorgängermodell erzielen lässt. Unter diesen Annahmen wird der momentane Umsatz beim „Data 2.0“ durch die Funktion f_2 beschrieben:

$$f_2(t) = a \cdot e^{-0{,}1\cdot(t-b)^2},$$

wobei t für die Zeit in Monaten seit Produktionsbeginn des „Data 2.0“ steht.

Der Graph von f_2 ist in der Anlage dargestellt.

d) Bestimmen Sie die Parameter a und b. (15P)

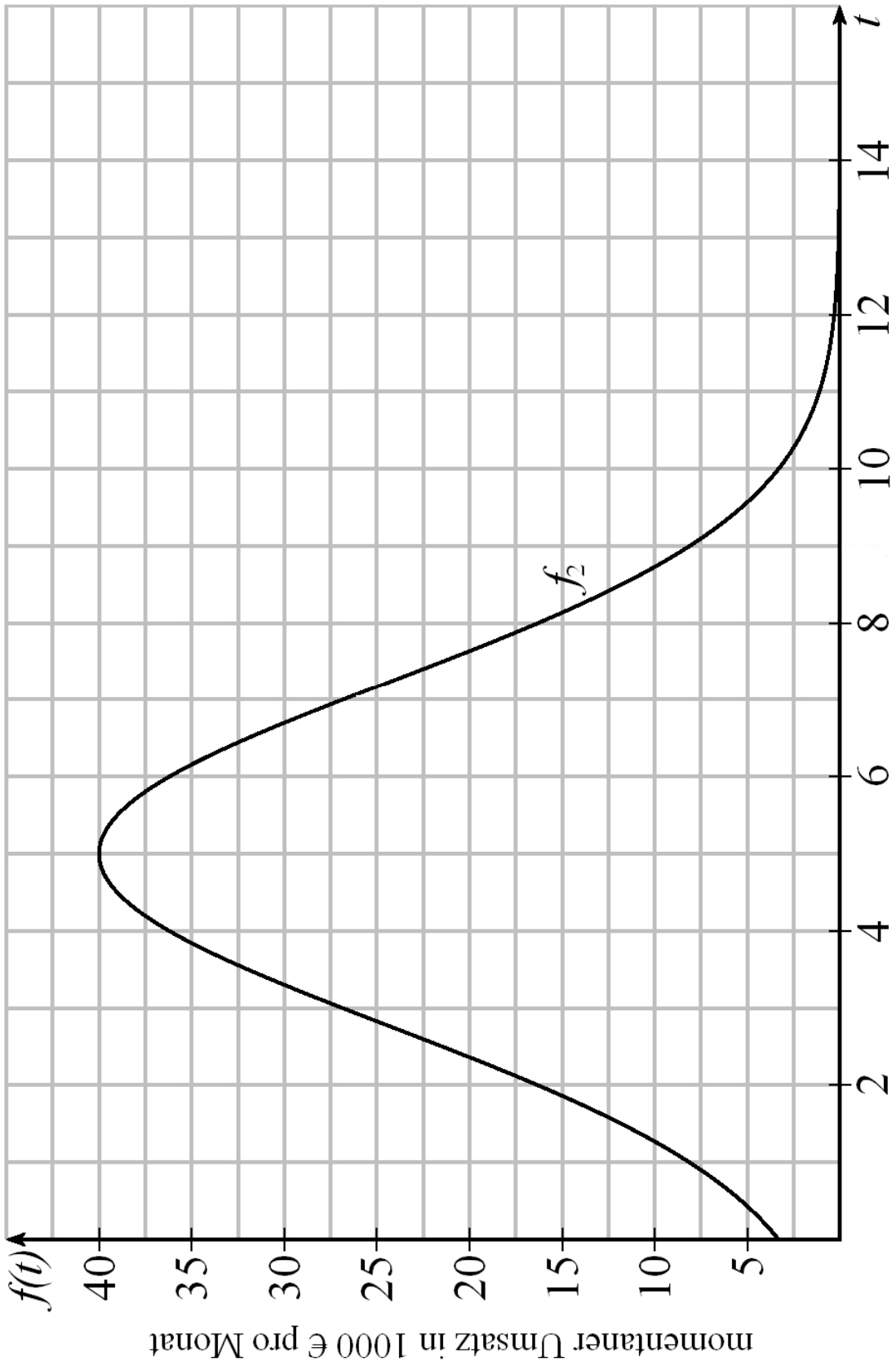
Hinweis: Die Sättigungsphase beginnt nach 5 Monaten.
Zur Kontrolle: $f_2(t) = 40 \cdot e^{-0{,}1\cdot(t-5)^2}$

e) Bestätigen Sie, dass über einen längeren Zeitraum hinweg auch der momentane Umsatz beim „Data 1“ in guter Näherung durch die Funktion f_2 beschrieben worden wäre, und entscheiden Sie, welche Phasen der Entwicklung in diesem Zeitraum lagen. (15P)

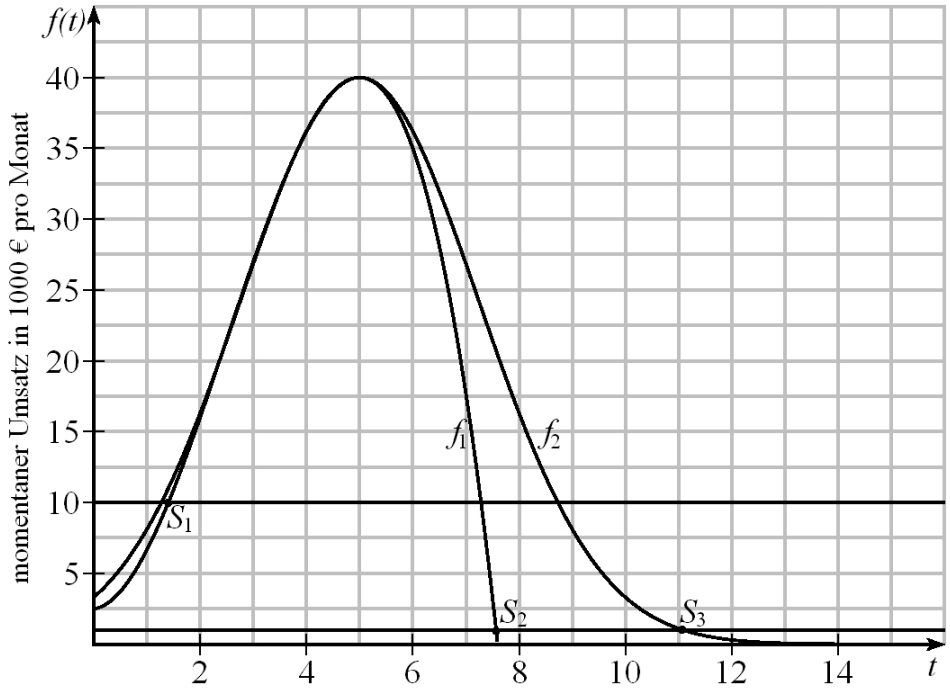
f)
- Bestimmen Sie mit einem geeigneten Verfahren näherungsweise den Gesamtumsatz, den die Firma mit dem „Data 2.0“ erwartet.

  Beachten Sie hierbei, dass auch dieses Produkt vom Markt genommen wird, wenn der momentane Umsatz unter 1000 € fällt.
- Vergleichen Sie die Gesamtumsätze der beiden Modelle miteinander. (10P)

Anlage zur Aufgabe „USB-Sticks“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)		10		
b)	• Es ist t in $-\frac{7}{12}t^3+\frac{13}{3}t^2+\frac{5}{12}t+\frac{5}{2}=10$ zu bestimmen. Der Grafik entnimmt man den Schnittpunkt von f_1 und der Funktion g_1 mit $g_1(t) = 10$: $S_1(\approx 1{,}4\|10)$. • Die Sättigungsphase beginnt bei der Maximumstelle der Funktion f_1: $f_1'(t)=-\frac{7}{4}t^2+\frac{26}{3}t+\frac{5}{12}$ $f_1''(t)=-\frac{7}{2}t+\frac{26}{3}$ Mit $f_1'(t)=0$ folgt: $-\frac{7}{4}t^2+\frac{26}{3}t+\frac{5}{12}=0$ $t^2-\frac{104}{21}t-\frac{5}{21}=0$ $t_{1,2}=\frac{52}{21}\pm\sqrt{\frac{2704}{441}+\frac{105}{441}}$			

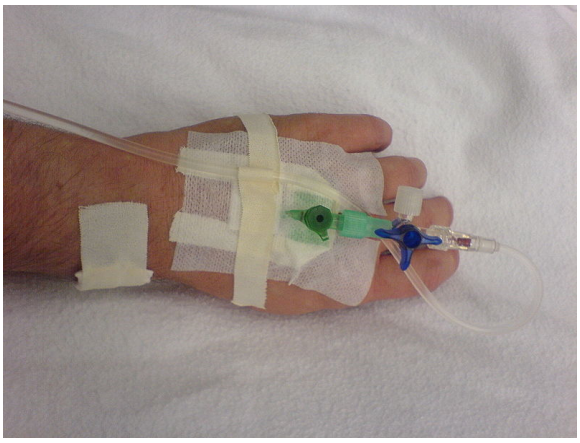
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
	$t_{1,2} = \frac{52}{21} \pm \sqrt{\frac{2809}{441}}$ $t_1 = \frac{52}{21} + \frac{53}{21} = 5$ $t_2 = \frac{52}{21} - \frac{53}{21} = -\frac{1}{21} < 0$ (*nicht relevant*) Da $f_1''(5) = -\frac{7}{2} \cdot 5 + \frac{26}{3} < 0$ ist, hat die Funktion f_1 an der Stelle $x = 5$ ein lokales Maximum. *Die Überprüfung der hinreichenden Bedingung kann ersetzt werden durch einen Hinweis auf den Verlauf des Graphen.* Die Sättigungsphase beginnt nach 5 Monaten, d. h. vom Ende der Einführungsphase bis zum Beginn der Sättigungsphase dauert es etwa 3,6 Monate.	5	15	
c)	• Es ist der Schnittpunkt von f_1 und g_2 mit $g_2(t) = 1$ zu betrachten. Man liest aus der Grafik (Punkt S_2) ab, dass nach etwa 7,6 Monaten ein Erlös von 1000 € erreicht ist. Der „Data 1“ wird nach etwa 7,6 Monaten vom Markt genommen.	5		
	• Ansatz: $F_1(t) = -\frac{7}{48}t^4 + \frac{13}{9}t^3 + \frac{5}{24}t^2 + \frac{5}{2}t + c$ Da $F_1(0) = 0$ sein soll, gilt $F_1(t) = -\frac{7}{48}t^4 + \frac{13}{9}t^3 + \frac{5}{24}t^2 + \frac{5}{2}t$. Die Funktion F_1 ist die Gesamtumsatz-Funktion, d. h. $F_1(t)$ gibt den gesamten Umsatz (in 1000 €) vom Beginn der Produktion bis zum Zeitpunkt t an.		5	5
	• Wegen $F_1'' = f_1'$ stimmen die Wendestellen von F_1 mit den Extremstellen von f_1 überein, die bereits in Teil b) bestimmt wurden. Da die Funktionen für negative Argumente nicht definiert sind, lautet die Antwort: Die einzige Wendestelle von F_1 ist 5.			5
	• Der Gesamtumsatz entspricht dem Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion des momentanen Umsatzes während des Produktlebenszyklus, also $A_1 = \int_0^{7,6} f_1(t)dt = F_1(7,6) - F_1(0) \approx 178,58$. Der Gesamtumsatz der Firma mit dem „Data 1“ betrug etwa 178 580 €.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Es ist $f_2(t) = a \cdot e^{-0,1\cdot(t-b)^2}$ und $f_2'(t) = -0,2a \cdot (t-b) \cdot e^{-0,1\cdot(t-b)^2}$. Aus $f_2(5) = 40$ folgt $a \cdot e^{-0,1\cdot(5-b)^2} = 40$ $a = \frac{40}{e^{-0,1\cdot(5-b)^2}}$ Aus $f_2'(5) = 0$ folgt $-0,2a \cdot (5-b) \cdot e^{-0,1\cdot(5-b)^2} = 0$ Man setzt $a = \frac{40}{e^{-0,1(5-b)^2}}$ ein und erhält $-0,2 \cdot \frac{40}{e^{-0,1\cdot(5-b)^2}} \cdot (5-b) \cdot e^{-0,1\cdot(t-b)^2} = 0$ $-8 \cdot (5-b) = 0$ $-40 + 8b = 0$ $b = 5$ Eingesetzt in $a = \frac{40}{e^{-0,1\cdot(5-b)^2}}$, ergibt sich $a = 40$. Damit erhält man $f_2(t) = 40e^{-0,1\cdot(t-5)^2}$.		15	
e)	*Eine Möglichkeit der Bestätigung stellt die folgende Wertetabelle dar:* x | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ 0 | 2,5 | 3,3 1 | 6,7 | 8,1 2 | 16 | 16,3 3 | 27 | 26,8 4 | 36,2 | 36,2 5 | 40 | 40 6 | 35 | 36,2 Für einen Zeitraum von etwa 4 Monaten – mehr als die Hälfte der Dauer des Produktlebenszyklus – ergeben sich sehr geringe Abweichungen. Dieser Zeitraum umfasst die Wachstumsphase und die Reifephase. *Alternative Argumentationen sind möglich.*	10	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	• Der Gesamtumsatz entspricht dem Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion f_2 während des Lebenszyklus. Die obere Grenze kann man aus der Grafik ablesen: Punkt $S_3(\approx 11\|1)$. Also ist das Intervall [0;11] zu betrachten. Ein geeignetes Näherungsverfahren zur Bestimmung des Flächeninhalts ist das Abzählen der Kästchen, wobei ein Kästchen den Flächeninhalt 2,5 FE hat. Es liegen 68 ganze Kästchen unter dem Graphen. Die Bruchteile ergeben zusammen weitere (etwa) 19 Kästchen. Damit ergibt sich als Flächeninhalt: $A_2 \approx 87 \cdot 2{,}5 = 217{,}5$ Die Firma kann mit dem „Data 2.0“ einen Gesamtumsatz von etwa 217 500 € erwarten. *Leicht abweichende nachvollziehbare Zählergebnisse sollen ebenfalls als richtig anerkannt werden.* *Die nachfolgende Berechnung wird nicht verlangt:* $40e^{-0{,}1\cdot(t-5)^2} = 1$ $-0{,}1\cdot(t-5)^2 = \ln 0{,}025$ $(t-5)^2 = -10\cdot \ln 0{,}025$ $t_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-10\cdot \ln 0{,}025}$ $t_1 \approx 5 + 6{,}073... \approx 11{,}073$ $t_2 \approx 5 - 6{,}073 < 0 \quad (\textit{nicht relevant})$ $\int_0^{11{,}07} 40\cdot e^{-0{,}1\cdot(t-5)^2}\,dt = 220{,}61$ • Der Gesamtumsatz mit dem „Data 1“ betrug laut Teil c) etwa 178 580 €. Die Firma kann also eine Steigerung des Gesamtumsatzes um rund 39 000 € (d. h. um über 20 %) erwarten.			10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Analysis 2

I.2 Intravenös



Bei vielen Krankheitsverläufen ist die direkte Verabreichung von Medikamenten in ein venöses Blutgefäß unumgänglich. Dies geschieht meist mit Hilfe einer intravenösen Applikation, die an einen Tropf angeschlossen ist. Dieser enthält die zu verabreichenden Medikamente.

Zu Behandlungsbeginn enthält der Organismus das Medikament noch nicht.

Sobald die medikamentöse Zufuhr beginnt, erhöht sich die Menge des Medikaments im Körper. Gleichzeitig fängt der Körper jedoch mit der Verarbeitung und dem Abbau des Medikaments an.

Die folgende Messwerttabelle zeigt die erste Stunde nach Anlegen des Tropfes bei einem bestimmten Patienten („Patient S“) mit einem Gewicht von 60 kg. Es wurden alle 10 Minuten die verbliebene Menge im Tropf und die Medikamentenkonzentration im Körper gemessen; aus der Konzentration wurde die in der Tabelle angegebene Medikamentenmenge errechnet.

Zeit t in Minuten	0	10	20	30	40	50	60
Inhalt des Tropfes in ml	300	285	270	255	240	225	210
Medikamentenmenge im Körper in Mengeneinheiten (ME)	0	11,8	18,96	23,31	25,94	27,54	28,51

a) Bestätigen Sie, dass der Inhalt des Tropfes linear von der Zeit abhängt, und geben Sie die Gleichung der entsprechenden linearen Funktion f an. (10P)

Die im Körper verbliebene Medikamentenmenge lässt sich durch die Funktionsgleichung

$$g(t) = a - a \cdot e^{-b \cdot t}$$

mit patientenabhängigen Parametern a und b beschreiben. Für einen bestimmten Patienten erhält man den Wert von a, indem man den Zahlenwert seines Gewichts (in kg) halbiert. Für den Patienten S ist also $a = 30$. Der Wert von b hängt von der Nierenleistung des Patienten sowie von der Konzentration bestimmter Substanzen in seinem Blut ab.

b)
- Berechnen Sie den Wert des Parameters b für den Patienten S.
  Zur Kontrolle: $b \approx 0{,}05$
- Untersuchen Sie, wie sich die Medikamentenmenge im Körper des Patienten S bei kontinuierlicher Verabreichung langfristig entwickelt.
- Geben Sie an, um welche Form von Wachstum es sich handelt. (15P)

c)
- Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung von f und von g.
- Zeichnen Sie die Graphen der Funktion g und ihrer Ableitung jeweils für sich in die Koordinatensysteme in der Anlage. Für die t-Achse wurde das Intervall [0;120] gewählt. Legen Sie den Maßstab für die andere Achse jeweils sinnvoll fest.
- Interpretieren Sie die Werte $f'(30)$ und $g'(30)$ sowie allgemein die Bedeutung der Ableitungsfunktionen f' und g' im Sachkontext.
- Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen von g' im Sachkontext. (25P)

d)
- Wenn die Konzentration des Medikaments im Körper zu niedrig ist, lässt es sich nicht nachweisen. Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, an dem die Medikamentenmenge im Körper des Patienten S die Nachweisgrenze von 3 ME überschreitet.
- Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, an dem die Änderungsrate der Medikamentenmenge im Körper des Patienten S nur noch $0{,}03\,\frac{\text{ME}}{\text{min}}$ beträgt. (10P)

e)
- Bestimmen Sie die Werte der Integrale $\int_0^{30} f'(t)\,dt$ und $\int_0^{30} g'(t)\,dt$.
- Interpretieren Sie die Werte im Sachkontext. (15P)

Für eine Langzeitstudie über die Nebenwirkungen des Medikaments wird in allen Krankenhäusern ermittelt, wie hoch die durchschnittliche Menge im Körper des Patienten in der ersten Stunde ist.

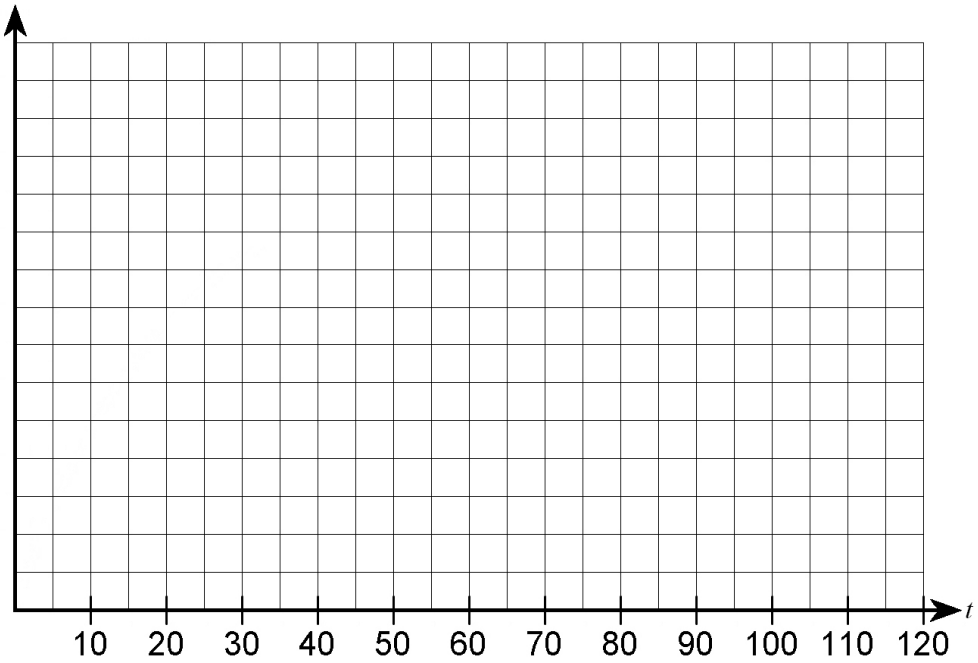
f) Ermitteln Sie diese Menge für den Patienten S. (10P)

In der oben gegebenen Funktionsgleichung für g sind die Parameter a und b patientenabhängig.

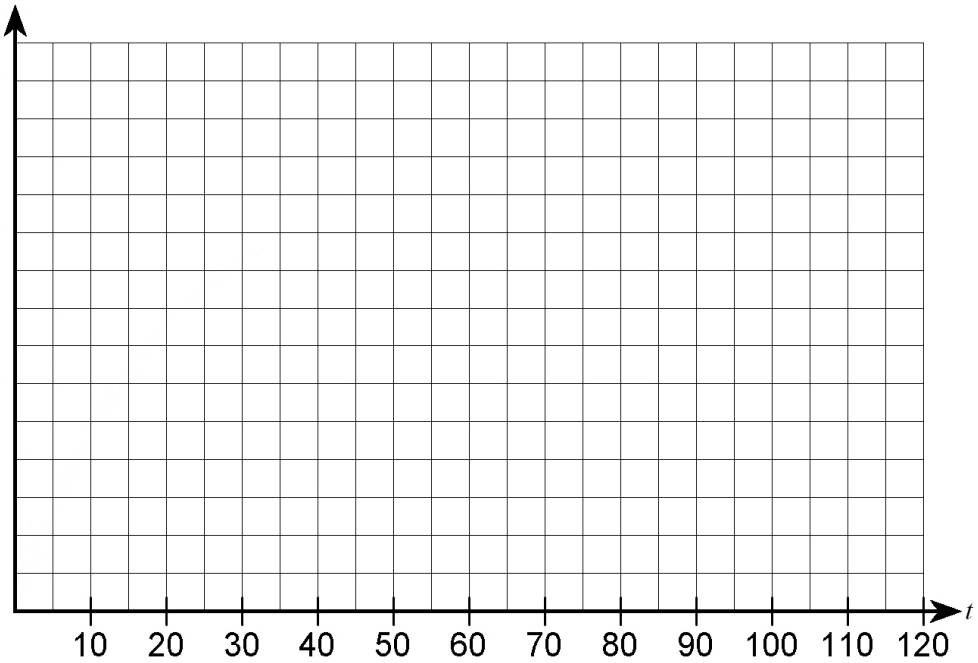
g)
- Beurteilen Sie, wie sich der Parameter b ändert, wenn der Körper eines anderen Patienten, der ebenfalls 60 kg wiegt, das Medikament deutlich schneller abbaut.
- Geben Sie die Gleichung der Funktion g_H für einen Patienten an, der 100 kg wiegt und für den $b = 0{,}1$ ist („Patient H“).
- Die gewünschte Wirkung des Medikaments tritt ein, wenn die Medikamentenmenge im Körper des Patienten 75 % des jeweiligen Wertes von a erreicht.
  Untersuchen Sie, ob die Wirkung beim Patienten S oder beim Patienten H schneller eintritt. (15P)

Anlage zur Aufgabe „Intravenös“

Graph von g:

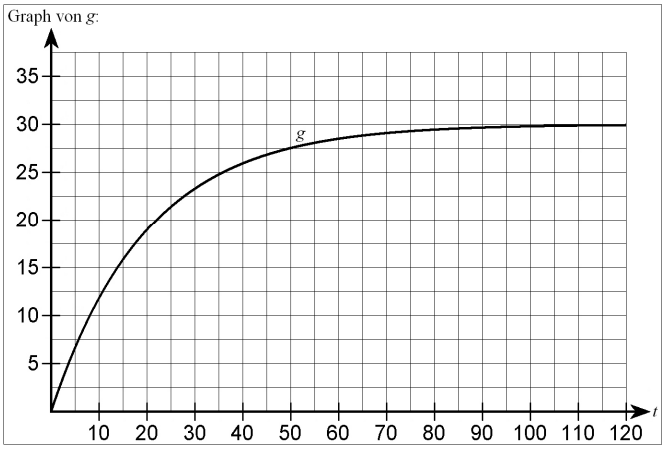
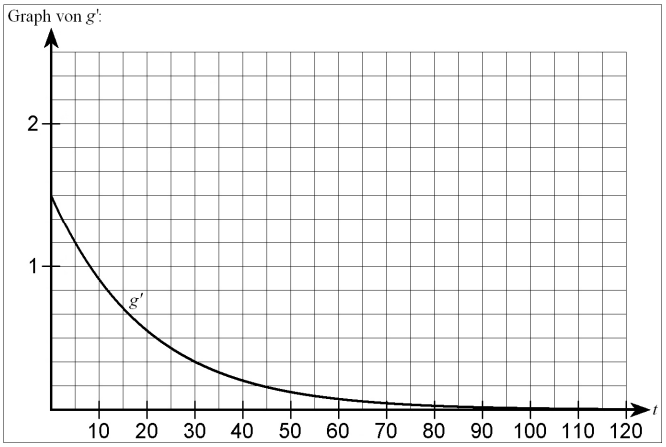


Graph von g':



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	*Mögliche Argumentation:* Die Abnahme im Tropf beträgt 15 ml alle 10 Minuten, also 1,5 ml pro Minute. Exemplarische Rechnung: $\frac{(285-300)\text{ ml}}{(10-0)\text{ min}} = -1{,}5\,\frac{\text{ml}}{\text{min}}$ Ein Graph mit der konstanten Steigung –1,5 gehört zu einer linearen Funktion. Der Anfangswert zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt 300 [ml]. Die Gleichung der linearen Funktion lautet demnach $f(t) = -1{,}5 \cdot t + 300$. *Man kann auch zunächst die Funktionsgleichung angeben und dann die Werte aus der Messwerttabelle durch Einsetzen überprüfen.* *Eine rein argumentative Lösung ist ebenfalls zulässig.*	10		
b)	• Einsetzen von z. B. (20|18,96) ergibt $g(20) = (18{,}96)$: $30 - 30 \cdot e^{-b \cdot 20} = 18{,}96$ $30 \cdot e^{-b \cdot 20} = 11{,}04$ $e^{-b \cdot 20} = 0{,}368$ $-b \cdot 20 = \ln(0{,}368)$ $b \approx 0{,}05$ Damit lautet die Funktionsgleichung $g(t) = 30 - 30 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}$. • Die langfristige Konsequenz einer kontinuierlichen Verabreichung ergibt sich aus dem Grenzwert für $t \to \infty$: $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to\infty}(30 - 30 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}) = \lim\limits_{t\to\infty} 30 - \lim\limits_{t\to\infty} 30 \cdot e^{-0{,}05t} = 30 - 0 = 30$ Das bedeutet, dass die Medikamentenmenge im Organismus langfristig gegen eine Obergrenze von 30 ME strebt. • Es handelt sich hierbei um beschränktes Wachstum.	5	10	
c)	• $f'(t) = -1{,}5$ $g'(t) = -30 \cdot (-0{,}05) \cdot e^{-0{,}05 \cdot t} = 1{,}5 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}$			

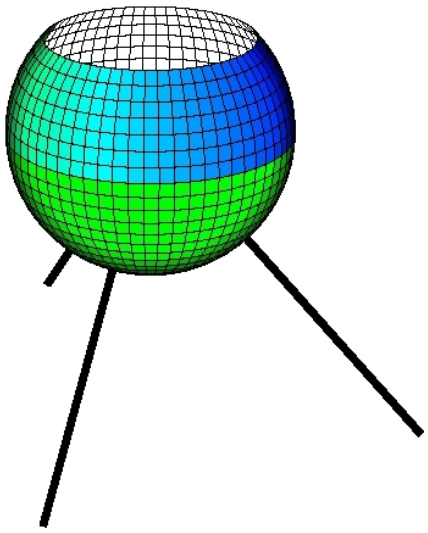
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	• Graphische Darstellungen:   • $f'(30) = -1{,}5$ $g'(30) = 1{,}5 \cdot e^{-0{,}05 \cdot 30} = 0{,}33$ Der Zahlenwert von $f'(30)$ besagt, dass die Medikamentenmenge im Tropf in der 30. Minute um 1,5 ml abnimmt. Der Zahlenwert von $g'(30)$ besagt, dass die Medikamentenmenge im Körper des Patienten S in der 30. Minute mit der Änderungsrate $0{,}33\,\frac{\text{ME}}{\text{min}}$ steigt. Grundsätzlich gibt die erste Ableitung der Funktionen f und g die jeweilige momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt t an. • Der Graph der Funktion g' ist eine monoton fallende Kurve. Die Menge der Medikamente im Körper des Patienten steigt zwar kontinuierlich an, aber der Anstieg wird immer langsamer.	10	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	• Es ist die Gleichung $g(t) = 3$ zu lösen: $30 - 30 \cdot e^{-0,05 \cdot t} = 3$ $30 \cdot e^{-0,05 \cdot t} = 27$ $-0,05 \cdot t = \ln(0,9)$ $t \approx 2,1$ Nach etwas mehr als 2 Minuten wird die Nachweisgrenze erreicht. • Es wird der Zeitpunkt gesucht, an dem die Änderungsrate $0,03 \frac{\text{ME}}{\text{min}}$ beträgt. $g'(t) = 0,03$ $1,5 \cdot e^{-0,05 \cdot t} = 0,03$ $e^{-0,05 \cdot t} = 0,02$ $t = -\frac{\ln(0,02)}{0,05} \approx 78,2$ In der 78. Minute beträgt die Änderungsrate $0,03 \frac{\text{ME}}{\text{min}}$.		10	
e)	• f ist eine Stammfunktion von f'; es gilt: $\int_0^{30} f'(t)dt = [f(t)]_0^{30}$ $= [-1,5 \cdot t + 300]_0^{30}$ $= -1,5 \cdot 30 + 300 - (-1,5 \cdot 0 + 300)$ $= 255 - 300 = -45$ g ist eine Stammfunktion von g'; es gilt: $\int_0^{30} g'(t)dt = [g(t)]_0^{30}$ $= \left[30 - 30 \cdot e^{-0,05 \cdot t}\right]_0^{30}$ $= 30 - 30 \cdot e^{-0,05 \cdot 30} - (30 - 30 \cdot e^0) = -30 \cdot e^{-1,5} + 30 \approx 23,31$ • $\int_0^{30} f'(t)dt$ gibt an, welche Menge des Medikaments [in ml] in 30 Minuten aus dem Infusionsbeutel abgeflossen ist. $\int_0^{30} g'(t)dt$ ist die Medikamentenmenge [in ME], die sich nach 30 Minuten im Körper des Patienten S befindet. *(Vgl. Messwerttabelle im Aufgabentext)*		10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Mittelwertberechnung durch Integration: $\frac{1}{60}\int_0^{60} g(t)dt = \frac{1}{60}\cdot\int_0^{60}(30-30\cdot e^{-0,05\cdot t})dt$ $= \frac{1}{60}\cdot\left[30t+600\cdot e^{-0,05\cdot t}\right]_0^{60}$ $= \frac{1}{60}\cdot\left(30\cdot 60+600\cdot e^{-0,05\cdot 60}-600\right)$ $\approx 20,5$ In der ersten Stunde befinden sich im Körper des Patienten S durchschnittlich 20,5 ME des Medikaments.			10
g)	• Schnellerer Abbau ergibt sich, wenn der Subtrahend im Funktionsterm größer ist, d. h. wenn der Exponent einen größeren Wert annimmt. Das ist für einen kleineren Betrag des Parameters *b* der Fall, da er mit negativem Vorzeichen in die Rechnung eingeht. *Auch eine rechnerische Lösung durch systematisches Probieren ist möglich.* • $g_H(t) = 50-50\cdot e^{-0,1\cdot t}$ • *Mögliche Lösungsvariante durch Berechnung der Zeiten:* Patient S: $30-30\cdot e^{-0,05\cdot t}=22,5$; $30\cdot e^{-0,05\cdot t}=7,5$; $e^{-0,05\cdot t}=0,25$; $-0,05\cdot t=\ln 0,25$; $t\approx 27,73$ Patient H: $50-50\cdot e^{-0,1\cdot t}=37,5$; $50\cdot e^{-0,1\cdot t}=12,5$; $e^{-0,1\cdot t}=0,25$; $-0,1\cdot t=\ln 0,25$; $t\approx 13,86$ Beim Patienten H tritt die Wirkung schneller ein. *Mögliche Lösungsvariante durch Argumentation:* Bei gleichem *b* würde die Medikamentenmenge im Körper 75 % ihrer Obergrenze für jedes Körpergewicht zur gleichen Zeit erreichen. Entscheidend ist bei diesem Vergleich also nur, dass *b* beim Patienten S den kleineren Betrag hat. Bei ihm wird demnach das Medikament schneller abgebaut (siehe oben), weshalb es bei ihm bis zum Erreichen der Wirkungsschwelle länger dauert. *Jede andere sinnvolle Begründung ist als richtig zu bewerten.* *Hinweis: Die Angabe, dass die Zeit beim Patienten S genau doppelt so lang ist wie beim Patienten H, wird nicht erwartet.*	5	5	5
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

LA/AG 1

II.1 Kletterpark



In einem Kletterpark werden die Besucher zunächst gesichert und hangeln sich dann, an einem der Seile hängend, von Baum zu Baum. Als zusätzliche Attraktion soll ein Turm in Form einer oben abgeschnittenen Kugel gebaut und mit einer Aussichtsplattform versehen werden. Der Mittelpunkt des Turmes soll genau unter dem Punkt platziert werden, in dem zwei Kletterseile einander berühren. Die beiden Seile sind zwischen vier großen Bäumen gespannt.
Der Durchhang wird hier vernachlässigt und vereinfachend angenommen, dass die Seile durch diejenigen Teilstrecken der folgenden Geraden beschrieben werden können, die in den Klammern definiert sind:

$$g_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R} \qquad (-3 \le s \le 1)$$

$$g_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -4 \\ 2{,}5 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \qquad (-1 \le t \le 3)$$

Hinweis: 1 Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 Meter in der Realität.

a)
- Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden g_1 und g_2 und damit den Punkt, unter dem die Kugel platziert werden soll.
- Berechnen Sie für den höchsten und den tiefsten Befestigungspunkt der Seile jeweils die Höhe über der x-y-Ebene. (15P)

Vor dem Bau dieses Turmes wird von dem zuständigen Architektenbüro festgelegt, dass die Kugel einen Durchmesser von 6 m und den Mittelpunkt $M(0|0|6)$ haben soll. Sie soll von drei Holzstützen getragen werden, die sich im Punkt M treffen und die auf dem geneigten Gelände die Fußpunkte $F_1(6|0|0)$, $F_2(0|6|0)$ und $F_3(-6{,}36|-6{,}36|-3)$ haben. In 8 m Höhe über der x-y-Ebene und parallel zu ihr soll die Kugelkappe abgeschnitten und die dadurch entstandene Öffnung mit einer Acrylglasplatte abgedeckt werden.

b)
- Zeichnen Sie die Schnittfläche der (kompletten) Kugel mit der y-z-Ebene sowie die drei Stützen in das kartesische Koordinatensystem in der Anlage ein.
- Bestätigen Sie, dass die drei Fußpunkte ein gleichschenkliges Dreieck bilden. (10P)

c) Entscheiden Sie, ob die Aussichtsplattform über die Kletterseile erreicht werden kann. (5P)

d) Die Holzstützen durchstoßen die Kugeloberfläche jeweils in einem Punkt. Bestätigen Sie, dass die Ebene durch diese drei Durchstoßpunkte parallel zur x-y-Ebene liegt. (20P)

e) Damit eine ausreichende Stabilität gewährleistet ist, müssen die Innenwinkel zwischen den Holzstützen und dem Gelände mindestens 30° betragen.
Untersuchen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist. (20P)

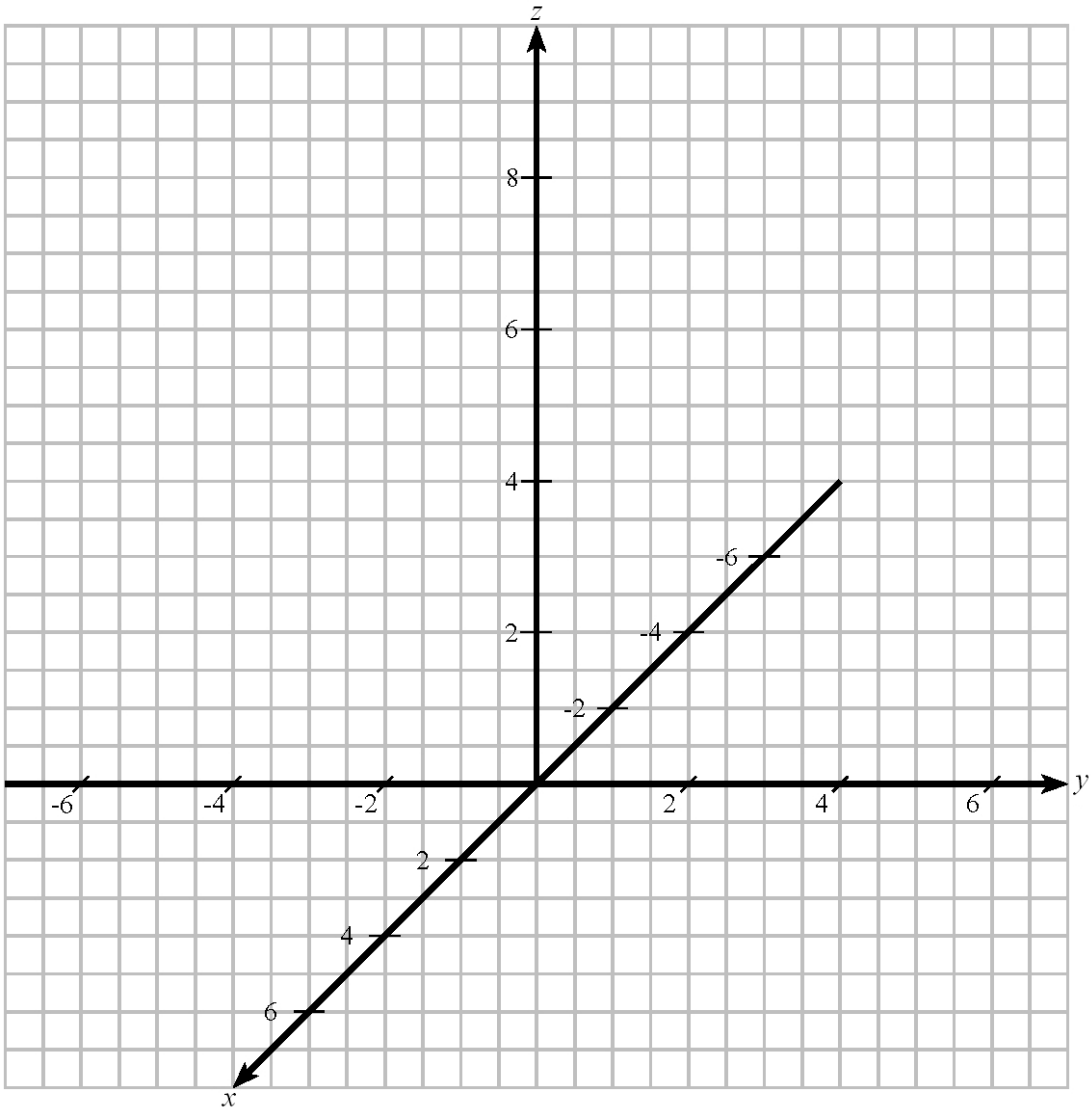
Aus Sicherheitsgründen wird in 30 cm Abstand vom Rand der Acrylglasplatte ein Geländer errichtet. Es dürfen sich immer nur so viele Menschen auf der Aussichtsplattform aufhalten, dass jeder Person mindestens 1 m^2 Fläche zur Verfügung steht.

f) Entscheiden Sie, ob der eingezäunte Teil der Acrylglasplatte ausreichend Platz bietet für eine Gruppe von 10 Personen. (10P)

Eine weitere Vorsichtsmaßnahme ist, dass Kinder ihren Sicherungshaken nicht über Kopf in ein Seil einklinken dürfen, wenn sie die Aussichtsplattform wieder verlassen wollen.

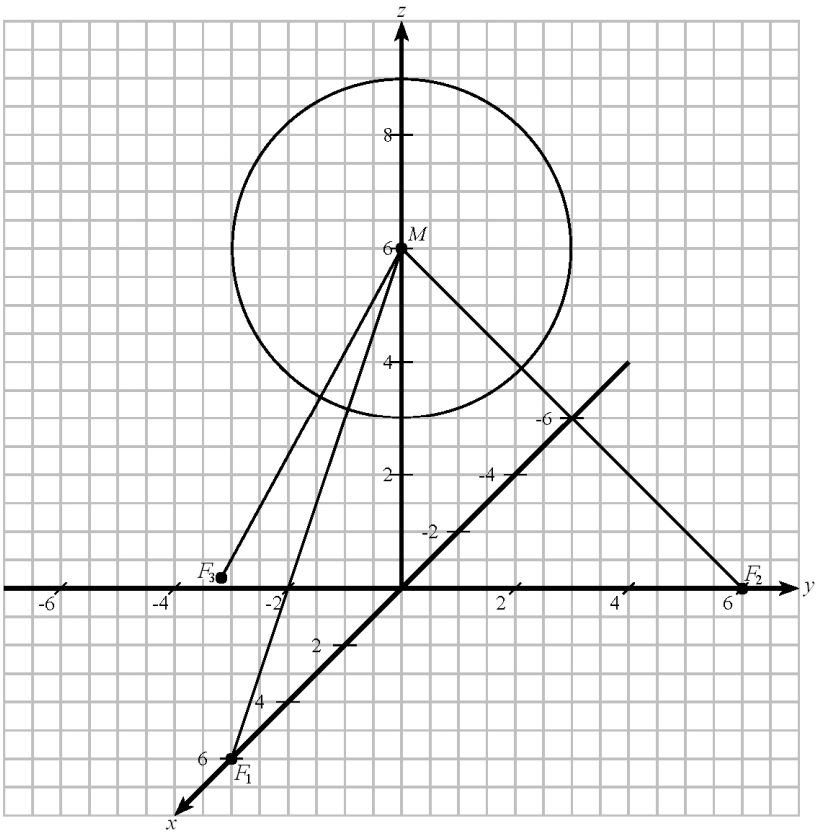
g) Beurteilen Sie, ob es im eingezäunten Teil der Acrylglasplatte einen Punkt gibt, an dem ein kleines Mädchen ein Seil in 1 m Höhe greifen könnte. (20P)

Anlage zur Aufgabe „Kletterpark“

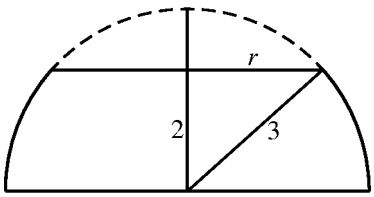


Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	• Ansatz: $\begin{pmatrix}10\\-3\\10\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}10\\-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\8\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3,5\\-4\\2,5\end{pmatrix}$ Man erhält das Gleichungssystem $10+10s=-7+3,5t$ $-3-3s=8-4t$ $10=5+2,5t$ Aus der dritten Gleichung folgt $t=2$. Eingesetzt in die zweite Gleichung, ergibt sich $-3-3s=0$, also $s=-1$. Einsetzen in die erste Gleichung führt zur wahren Aussage $10-10=-7+7$. Außerdem sind die Parameterwerte zulässig. Der gesuchte Schnittpunkt ist $S(0\|0\|10)$. • Da alle Punkte auf der Geraden g_1 die z-Koordinate 10 haben, verläuft das entsprechende Seil in der konstanten Höhe von 10 m parallel zur x-y-Ebene. Bei der Geraden g_2 ergeben sich an den Intervallgrenzen des Parameters t unterschiedliche z-Koordinaten: $5+(-1)\cdot 2,5=2,5$ und $5+3\cdot 2,5=12,5$. Der tiefste Befestigungspunkt liegt in einer Höhe von 2,50 m, der höchste in einer Höhe von 12,50 m über der x-y-Ebene.	15		

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
b)	• Grafische Darstellung:  • Berechnung der Seitenlängen des Dreiecks $F_1F_2F_3$: $\overrightarrow{F_1F_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit $\left\lvert \overrightarrow{F_1F_2} \right\rvert = \sqrt{72}$ $\overrightarrow{F_2F_3} = \begin{pmatrix} -6{,}36 \\ -12{,}36 \\ 3 \end{pmatrix}$ und damit $\left\lvert \overrightarrow{F_2F_3} \right\rvert = \sqrt{202{,}22}$ $\overrightarrow{F_3F_1} = \begin{pmatrix} 12{,}36 \\ 6{,}36 \\ 3 \end{pmatrix}$ und damit $\left\lvert \overrightarrow{F_3F_1} \right\rvert = \sqrt{202{,}22} = \left\lvert \overrightarrow{F_2F_3} \right\rvert$ Die Fußpunkte bilden also ein gleichschenkliges Dreieck.	10		
c)	Der Schnittpunkt der Seile liegt in 10 m Höhe über der x-y-Ebene und damit 2 m über der Plattform. Die Aussichtsplattform ist damit, zumindest für Erwachsene, von beiden Seilen aus erreichbar. *Man könnte auch noch den Durchhang in die Argumentation einbeziehen.* *Andere nachvollziehbar begründete Antworten sind als richtig zu bewerten.*		5	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Die Kugelgleichung lautet $x^2 + y^2 + (z-6)^2 = 9$. Zuerst werden die Geradengleichungen der Stützen aufgestellt, z. B. $h_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$, $h_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$, $h_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r_3 \begin{pmatrix} -6{,}36 \\ -6{,}36 \\ -9 \end{pmatrix}$ Einsetzen in die Kugelgleichung: h_1: $(0+6r_1)^2 + (0+0r_1)^2 + (6-6r_1-6)^2 = 9$ $36r_1^2 + 0 + 36r_1^2 = 9$ $r_1^2 = 0{,}125$ $r_1 = \sqrt{0{,}125}$ Damit erhält man den Durchstoßpunkt $D_1(2{,}12\|0\|3{,}88)$. h_2: Wegen der Symmetrie muss $r_2 = r_1$ sein. Damit erhält man den Durchstoßpunkt $D_2(0\|2{,}12\|3{,}88)$. h_3: $(0-6{,}36r_3)^2 + (0-6{,}36r_3)^2 + (6-9r_3-6)^2 = 9$ $40{,}4496r_3^2 + 40{,}4496r_3^2 + 81r_3^2 = 9$ $r_3 \approx 0{,}2358$ Damit erhält man den Durchstoßpunkt $D_3(-1{,}5\|-1{,}5\|3{,}88)$. Alle drei Durchstoßpunkte haben dieselbe z-Koordinate, die Ebene $E(D_1D_2D_3)$ liegt also parallel zur x-y-Ebene.	5	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	Aufstellen der Ebenengleichung für das Gelände in Parameterform: $E_G\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix}-12{,}36\\-6{,}36\\-3\end{pmatrix};\ u, v \in \mathbb{R}$ Das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren ergibt einen Normalenvektor zu der Gelände-Ebene: $\overrightarrow{n_G} = \begin{pmatrix}-18-0\\0-18\\38{,}16+74{,}16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-18\\-18\\112{,}32\end{pmatrix}$ Innenwinkel zwischen der längsten Stütze und dem Gelände: $\sin\alpha_3 = \dfrac{\left\lvert\begin{pmatrix}-6{,}36\\-6{,}36\\-9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-18\\-18\\112{,}32\end{pmatrix}\right\rvert}{\left\lvert\begin{pmatrix}-6{,}36\\-6{,}36\\-9\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}-18\\-18\\112{,}32\end{pmatrix}\right\rvert} \approx 0{,}5336$ und damit $\alpha_3 \approx 32{,}25° > 30°$ Innenwinkel zwischen einer anderen Stütze und dem Gelände: $\sin\alpha_1 = \dfrac{\left\lvert\begin{pmatrix}6\\0\\-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-18\\-18\\112{,}32\end{pmatrix}\right\rvert}{\left\lvert\begin{pmatrix}6\\0\\-6\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}-18\\-18\\112{,}32\end{pmatrix}\right\rvert} \approx 0{,}8001$ und damit $\alpha_1 \approx 53{,}14° > 30°$ Aus Gründen der Symmetrie ist $\alpha_2 = \alpha_1$. Damit ist die Bedingung erfüllt. *Statt α_1 zu berechnen, kann man auch argumentieren, dass eine kurze Stütze auf jeden Fall einen größeren Winkel mit dem Gelände einschließt als eine längere.*		20	
f)	Für den Radius r der Acrylglasplatte gilt nach dem Satz des Pythagoras: $2^2 + r^2 = 3^2$ $r = \sqrt{5}$ [m] Der Radius r_E des eingezäunten Teils ist also $r_E = r - 0{,}30 = \sqrt{5} - 0{,}30 \approx 1{,}94$ [m]  			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	$A_E = \pi \cdot r_E^{\,2} \approx 11{,}78\,[\mathrm{m}^2]$ Die Plattform würde sogar für 11 Personen ausreichend Platz bieten.		10	
g)	Da das Mädchen das durch g_1 beschriebene Seil, das in einem Abstand von 2 m parallel zur Plattform verläuft, ganz bestimmt nicht erreichen kann, wird für die Berechnungen g_2 herangezogen. Der gesuchte Punkt muss die z-Koordinate 9 haben. Es muss also gelten: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -4 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ Aus $9 = 5 + 2{,}5t$ folgt $t = 1{,}6$ und daraus $x = -1{,}4$ und $y = 1{,}6$. Demnach müsste das Mädchen am Punkt (–1,2|1,6|8) stehen, um das durch g_2 beschriebene Seil in einer Höhe von 1 m erreichen zu können. Um herauszufinden, ob dieser Punkt innerhalb des eingezäunten Teils der Plattform liegt, kann beispielsweise die Bedingung $x^2 + y^2 < r_E^{\,2}$ überprüft werden: $(-1{,}4)^2 + 1{,}6^2 = 4{,}52 > 3{,}75 = r_E^{\,2}$ Damit ist klar: Es gibt keinen Punkt innerhalb des eingezäunten Bereichs, von dem aus das kleine Mädchen eines der Seile erreichen kann. *Man könnte auch zunächst die Punkte bestimmen, in denen die Projektion von g_2 in die Plattform-Ebene den Kreis mit dem Radius r_E schneidet, und dann prüfen, ob g_2 dort weniger als 1 m oberhalb der Plattform verläuft.*			20
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

LA/AG 2

II.2 Straßenkatzen

Die Hauskatze ist das beliebteste Haustier der Deutschen. Ungefähr 8,2 Millionen Tiere werden in 16,5 % aller Haushalte (Stand 2009) gehalten und von ihren Besitzern umhegt und gepflegt.

Was allerdings die Problematik „Straßenkatzen“ in Deutschland betrifft, so herrschen ähnliche Zustände, wie man sie von den Straßenhunden in Europa kennt. Straßen- oder Streunerkatzen leben herrenlos und auf sich allein gestellt.

Katzen vermehren sich vergleichsweise schnell. Zum einen wirft eine Katze im Jahr bis zu dreimal Junge, wobei ein Wurf im Durchschnitt aus vier bis fünf Jungtieren besteht. Zum anderen werden Katzen sehr schnell geschlechtsreif, nämlich im Alter von fünf bis acht Monaten.

Die Lebenserwartung in herrenlosen Katzenpopulationen, ohne menschliche Zuwendung und medizinische Betreuung, beträgt für weibliche Tiere ca. 3 bis 4 Jahre, für Kater ca. 1 bis 2 Jahre.

Im Folgenden soll eine Katzenpopulation betrachtet werden, die in fünf Altersklassen unterteilt ist:

FK: Kätzchen im Alter von 0 bis unter 12 Monaten

F1: Katzen im Alter von 1 bis unter 2 Jahren

F2: Katzen im Alter von 2 bis unter 3 Jahren

F3: Katzen im Alter von 3 bis unter 4 Jahren

F4: Katzen im Alter von mindestens 4 Jahren

a) Die Entwicklung pro Jahr wird durch

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,69 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,57 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,44 & 0,11 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

- Erstellen Sie den Übergangsgraphen, der diese Entwicklung beschreibt.
- Beschreiben Sie die Bedeutung aller von null verschiedenen Einträge der Populationsmatrix im Sachkontext. (15P)

b) Berechnen Sie P^2 und interpretieren Sie die fünfte Zeile. (15P)

In einem Hamburger Stadtbezirk wurde von einer Tierschutzorganisation folgender Bestandsvektor für Straßenkatzen ermittelt: $\overrightarrow{k_0} = \begin{pmatrix} 500 \\ 1000 \\ 950 \\ 812 \\ 110 \end{pmatrix}$.

c)
- Berechnen Sie die prozentuale Zunahme im Zeitraum von zwei Jahren, wenn nicht vom Menschen (z. B. durch Kastration) eingegriffen wird.
- Beschreiben Sie, wie sich die Population langfristig ohne Eingriff entwickeln wird. (20P)

d) Bestätigen Sie, dass es unter den durch die Matrix P beschriebenen Bedingungen keinen Bestandsvektor geben kann, der sich reproduziert. (10P)

Da Straßenkatzen in der Regel nicht an den Menschen gewöhnt sind, ist eine Unterbringung in (den meist überfüllten) Tierheimen und anschließende Vermittlung nicht sinnvoll. Um die unkontrollierte Katzenvermehrung dennoch zu minimieren, machen Tierschutzorganisationen den Vorschlag, nach dem Zufallsprinzip eingefangene Katzen zu kastrieren, diese jedoch anschließend in ihrer gewohnten Umgebung zu belassen.

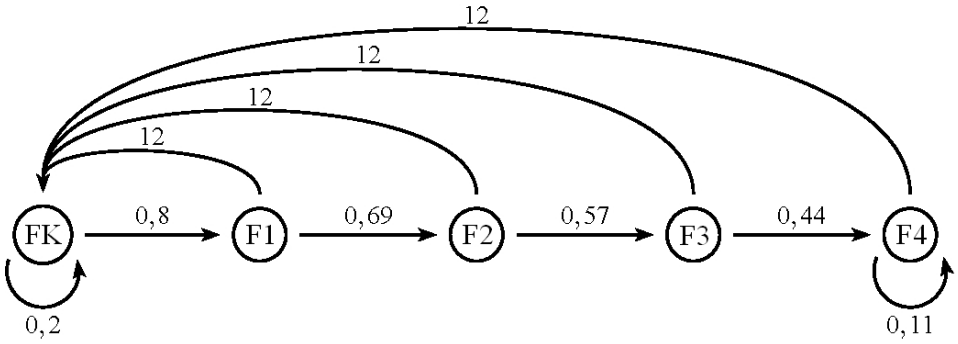
e) Die Verringerung der Geburtenrate aufgrund von ersten Kastrationsmaßnahmen in begrenztem Umfang wird durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschrieben.

- Ermitteln Sie $M \cdot P$ und $P \cdot M$.
- Begründen Sie im Sachkontext, wie die Reihenfolge von M und P gewählt werden muss, damit sich mit der resultierenden Matrix die Population im Jahr nach diesen Kastrationsmaßnahmen berechnen lässt. Bezeichnen Sie diese Matrix mit Q. (20P)

f) Durch Ausweitung der Kastrationsmaßnahmen soll nun ein Stillstand der Vermehrung erreicht werden.

Bestimmen Sie den prozentualen Anteil, um den die Geburtenrate gegenüber der Matrix Q noch weiter reduziert werden muss, damit eine Anfangspopulation existiert, die unverändert bleibt. (20P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	 Die erste Zeile gibt die Geburtenraten an. Der Eintrag 0,2 bedeutet: es sorgen bereits so viele Kätzchen für Nachkommen, dass im Mittel auf 5 Kätzchen ein Junges kommt. *(Achtung! Die Aussage, dass 20 % der Kätzchen Junge bekommen, ist falsch.)* Bei den vier anderen Altersklassen hat jede Katze im Mittel 12 Junge. 80 % der Altersklasse FK überlebt und kommt in die Altersklasse F1. 69 % der Altersklasse F1 überlebt und kommt in die Altersklasse F2. 57 % der Altersklasse F2 überlebt und kommt in die Altersklasse F3. 44 % der Altersklasse F3 überlebt und kommt in die Altersklasse F4. Von den verbliebenen Streunerkatzen werden 11 % älter als 4 Jahre.	10	5	
b)	$P^2 \approx \begin{pmatrix} 9{,}64 & 10{,}68 & 9{,}24 & 7{,}68 & 3{,}72 \\ 0{,}16 & 9{,}6 & 9{,}6 & 9{,}6 & 9{,}6 \\ 0{,}55 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}39 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0{,}05 & 0{,}01 \end{pmatrix}$ P^2 beschreibt die Veränderung einer Population im Laufe von zwei Jahren. Mit der letzten Zeile wird die Anzahl der Katzen bestimmt, die nach zwei Jahren zur Altersklasse F4 gehören, also mindestens 4 Jahre alt sind.	10	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	• Bestandsvektor nach zwei Jahren: $\overrightarrow{k_2} = P^2 \cdot \overrightarrow{k_0}$ $\overrightarrow{k_2} = \begin{pmatrix} 9{,}64 & 10{,}68 & 9{,}24 & 7{,}68 & 3{,}72 \\ 0{,}16 & 9{,}6 & 9{,}6 & 9{,}6 & 9{,}6 \\ 0{,}55 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}39 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0{,}05 & 0{,}01 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 1000 \\ 950 \\ 812 \\ 110 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{k_2} = \begin{pmatrix} 9{,}64 \cdot 500 + 10{,}68 \cdot 1000 + 9{,}24 \cdot 950 + 7{,}68 \cdot 812 + 3{,}72 \cdot 110 \\ 0{,}16 \cdot 500 + 9{,}6 \cdot (1000 + 950 + 812 + 110) \\ 0{,}55 \cdot 500 \\ 0{,}39 \cdot 1000 \\ 0{,}25 \cdot 950 + 0{,}05 \cdot 812 + 0{,}01 \cdot 110 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{k_2} = \begin{pmatrix} 30923{,}36 \\ 27651{,}2 \\ 275 \\ 390 \\ 279{,}2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 30923 \\ 27651 \\ 275 \\ 390 \\ 279 \end{pmatrix}$ *(Wenn in P^2 nicht gerundet wird, ergeben sich kleine Abweichungen.)* Die Anzahl der Katzen ist von 3372 auf 59518 angewachsen. Die Zunahme um 56146 Tiere entspricht 1665 % [!] der Startpopulation. • Schon in nur 2 Jahren ist die Population sehr stark angewachsen. Sie wird langfristig gesehen höchstens so lange weiter wachsen, bis die biologische Grenze der Nahrungsverfügbarkeit erreicht ist. Spätestens dann verändern sich die Überlebensraten, und das Wachstum hört auf. Danach könnte die Populationsgröße in etwa gleich bleiben. Es besteht aber auch die Gefahr, dass sie, z. B. wegen einer Krankheit, wieder abnimmt. *Jede andere schlüssige Darstellung der Entwicklung ist als richtig zu werten.*	10	10	

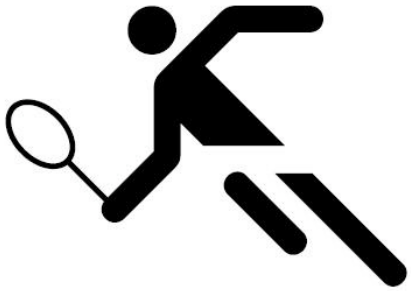
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Bei Reproduktion des Bestands müsste gelten: $\begin{pmatrix} 0,2 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,69 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,57 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,44 & 0,11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ Daraus folgt $\begin{aligned} 0,2x_1 + 12 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_5) &= x_1 \\ 0,8x_1 &= x_2 \\ 0,69x_2 &= x_3 \\ 0,57x_3 &= x_4 \\ 0,44x_4 + 0,11x_5 &= x_5 \end{aligned}$ und daraus $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Somit gibt es (außer der trivialen Lösung) keinen Bestandsvektor, der sich reproduziert.		10	
e)	$M \cdot P = \begin{pmatrix} 0,15 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,69 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,57 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,44 & 0,11 \end{pmatrix}$ Bei Multiplikation mit M von links ändert sich im Vergleich zu P die gesamte erste Zeile. Die daraus resultierende Matrix beschreibt also eine Reduktion der Geburtenrate in allen Altersklassen. $P \cdot M = \begin{pmatrix} 0,15 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,69 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,57 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,44 & 0,11 \end{pmatrix}$ Die Multiplikation mit M von rechts würde eine Maßnahme beschreiben, bei der sich die Kastration im nächsten Jahr nur bei der Altersklasse FK auswirkt. Da aber Katzen aller Altersstufen kastriert werden sollen, ist diese Reihenfolge bei der Multiplikation nicht sinnvoll. Also: $Q = M \cdot P$		10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Wenn die weitere Verringerung der Geburtenrate aufgrund der Ausweitung der Kastrationsmaßnahmen durch die Matrix $$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ beschrieben wird, dann soll $(A\cdot Q)\cdot\vec{k}=\vec{k}$ gelten, also $$\begin{pmatrix} 0{,}15\cdot a & 9\cdot a & 9\cdot a & 9\cdot a & 9\cdot a \\ 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}69 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}57 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}44 & 0{,}11 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$ Daraus folgt $$\begin{aligned} 0{,}15a\cdot x_1+9a\cdot(x_2+x_3+x_4+x_5)&=x_1 \\ 0{,}8x_1&=x_2 \\ 0{,}69x_2&=x_3 \\ 0{,}57x_3&=x_4 \\ 0{,}44x_4+0{,}11x_5&=x_5 \end{aligned}$$ und daraus schließlich $a\approx 0{,}06$. Das bedeutet, dass die Geburtenrate gegenüber der Matrix Q um 94 % reduziert werden muss, damit ein Anfangsbestand unverändert bleibt.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

STOCHASTIK 1

III.1 Gewinnprognose

Benny, ein ehemaliger Tennisprofi, verdient sich sein Geld, indem er jede Woche einen Schaukampf durchführt. Im Laufe der Zeit hat er festgestellt, dass seine Gewinnwahrscheinlichkeit davon abhängt, wie der vorangegangene Kampf ausgegangen ist. Dies kann psychologische Gründe haben oder auch dadurch bedingt sein, dass er für längere Zeit in gleichbleibend guter bzw. schlechter Form ist.



Nach einem verlorenen Spiel verliert er das nächste Spiel mit der Wahrscheinlichkeit 0,8, während auf einen Sieg ein weiterer Sieg mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 folgt.

a) Skizzieren Sie den zu diesen Angaben gehörenden Übergangsgraphen. (5P)

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Benny das übernächste Spiel gewinnt,

- wenn er heute gewonnen hat.
- wenn er heute verloren hat. (*Zur Kontrolle:* 0,3) (10P)

Gehen Sie bei allen folgenden Aufgabenteilen von der Voraussetzung aus, dass Benny sein heutiges Spiel verloren hat.

c) Erstellen Sie ein Baumdiagramm für die nächsten drei Spiele und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Benny nach seiner heutigen Niederlage

- die nächsten drei Spiele gewinnt.
- das Spiel in drei Wochen gewinnt. (20P)

Nun soll die Verdienstsituation von Benny betrachtet werden: Seine Verträge sehen so aus, dass er für ein gewonnenes Spiel eine Prämie von 2000 Euro erhält, für ein verlorenes Spiel aber nur eine Prämie von 1000 Euro.

d) Berechnen Sie unter Berücksichtigung der bisher gemachten Annahmen den Erwartungswert für die Prämie

- in der nächsten Woche.
- in der übernächsten Woche. (10P)

In der Vergangenheit hat Benny manchmal nach einer Niederlage ein zusätzliches Aufbautraining absolviert, das ihn 300 Euro kostet. Als Folge davon steigert sich die Gewinnwahrscheinlichkeit für das folgende Spiel auf 0,5.

e) Zeigen Sie, dass sich der Erwartungswert für die Prämie genau um 300 Euro erhöht, und begründen Sie, dass es sich für Benny trotzdem finanziell lohnt, das Aufbautraining durchzuführen. (15P)

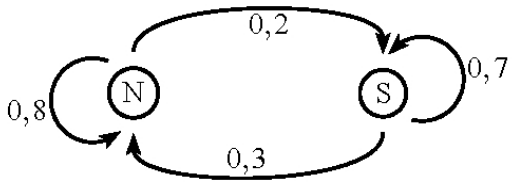
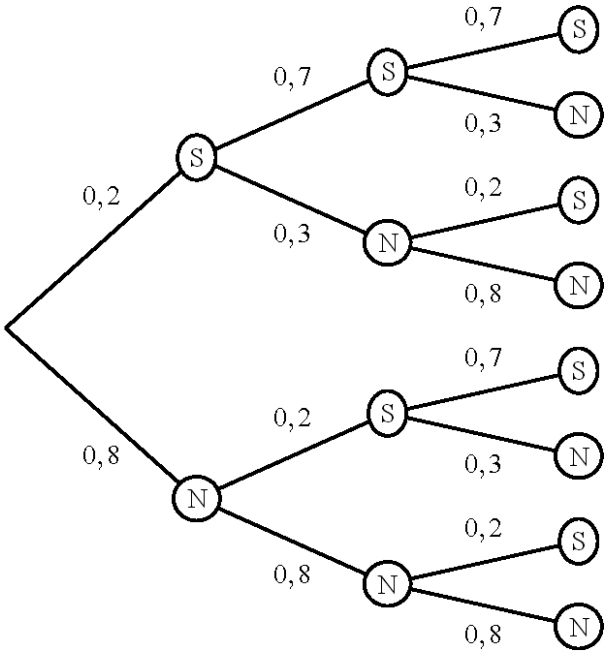
Benny hat, wie bereits erwähnt, sein heutiges Spiel verloren und will nun in der folgenden Woche das Aufbautraining durchführen. So will er es jetzt nach jeder Niederlage halten. Er macht sich aber Sorgen, dass es lange dauern könnte, bis er wieder eine höhere Prämie erhält, und dass er mehrere Wochen hintereinander das kosten- und zeitintensive Aufbautraining durchführen muss.

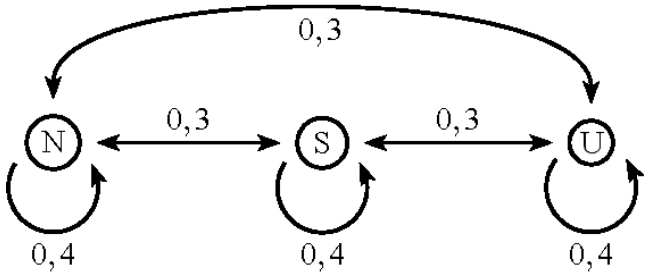
f) Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Spiele und damit die Anzahl der Wochen, in denen er das Aufbautraining durchführen muss, bis Benny wieder ein Spiel gewinnt. (15P)

Wäre Benny nicht ehemaliger Tennisprofi, sondern Mitspieler bei der All-Stars Fußballmannschaft, würden die Überlegungen etwas anders aussehen, da es dann auch ein Unentschieden geben kann. Es soll angenommen werden, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel in der nächsten Woche genauso ausgeht wie das Spiel in dieser Woche, 0,4 beträgt und alle anderen Übergangswahrscheinlichkeiten untereinander gleich groß sind.

g)
- Skizzieren Sie den zu diesen Angaben gehörenden Übergangsgraphen.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Mannschaft in den nächsten drei Wochen mindestens zwei Siege erzielt, wenn sie das heutige Spiel verloren hat. (25P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	 Dabei steht N für eine Niederlage von Benny und S für einen Sieg.	5		
b)	Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Benny das übernächste Spiel gewinnt, ist jeweils $P(\text{SS}) + P(\text{NS})$ und damit … • … $0{,}7^2 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}55$, falls er heute gewonnen hat. • … $0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}3$, falls er heute verloren hat.	10		
c)	Darstellung im Baumdiagramm:  • Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Benny die nächsten drei Spiele gewinnt, ist $P(\text{SSS}) = 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}098$. • Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Benny das Spiel in drei Wochen gewinnt, ist $P(\text{SSS}) + P(\text{SNS}) + P(\text{NSS}) + P(\text{NNS})$ $= 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}35$.	5	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	• Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind im Aufgabentext gegeben. Der Erwartungswert für die Prämie in der nächsten Woche ist $0{,}2 \cdot 2000\,€ + 0{,}8 \cdot 1000\,€ = 1200\,€$. • Für die übernächste Woche ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten aus Teil b). Also ist der Erwartungswert für die Prämie der übernächsten Woche $0{,}3 \cdot 2000\,€ + 0{,}7 \cdot 1000\,€ = 1300\,€$.	10		
e)	Da die Siegwahrscheinlichkeit auf 0,5 steigt, ist der Erwartungswert für die Prämie $0{,}5 \cdot 2000\,€ + 0{,}5 \cdot 1000\,€ = 1500\,€$ und damit um 300 Euro erhöht. Benny kann nur erwarten, seine Ausgaben für das Aufbautraining zusätzlich wieder zu verdienen. Trotzdem lohnt sich das Training, denn nach einem Sieg verbessern sich seine Gewinnchancen, und die in den folgenden Wochen zu erwartenden Prämieneinnahmen sind höher.		15	
f)	Es handelt sich um das Warten auf den ersten Erfolg bei einer Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg von 0,5. Damit ist der Erwartungswert der Kehrwert von 0,5, also 2. *Argumentation über den Vergleich mit dem Warten auf die erste 6 beim Mensch ärgere dich nicht oder über eine geometrische Verteilung* Benny erwartet, in 2 Wochen wieder ein Spiel zu gewinnen.		15	
g)	• Übergangsgraph:  Dabei wird Unentschieden mit U abgekürzt. • Die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Siege in den nächsten 3 Wochen ist $P(\text{SSS}) + P(\text{SSU}) + P(\text{SSN}) + P(\text{SUS}) + P(\text{SNS}) + P(\text{USS}) + P(\text{NSS})$ $= 0{,}3 \cdot 0{,}4^2 + [0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3] \cdot 2 + [0{,}3^3] \cdot 2 + 0{,}3^2 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}258$.		5	20
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

STOCHASTIK 2

III.2 Ein-Euro-Münzen

In der Cafeteria einer Schule werden während der Unterrichtszeit im Wesentlichen wöchentlich die Einnahmen gezählt und bei der Bank eingezahlt; dabei wird aus statistischen Gründen auch ermittelt, welche Verteilung die Ein-Euro-Münzen bezüglich der münzausgebenden Länder aufweisen.

Seit dem Beginn dieser Statistik im September 2009 bis zum Juli 2011 ergab sich Folgendes:
Insgesamt wurden 24 100 Ein-Euro-Münzen gezählt, davon kamen 15 705 aus Deutschland, 2 082 aus Spanien, 2 032 aus Italien und 60 aus Luxemburg. Die restlichen Münzen kamen aus den anderen dreizehn Euro-Ländern.

Verwenden Sie als Indizes zur Unterscheidung der Länder die Landeskennzeichen: D für Deutschland, E für Spanien, I für Italien und L für Luxemburg.

a) Zunächst sollen nur deutsche und nichtdeutsche Ein-Euro-Münzen unterschieden werden. Begründen Sie, dass man die Auszählung der nächsten Einnahme in guter Näherung als Bernoulli-Kette modellieren kann. (5P)

b) Geben Sie die relative Häufigkeit des Auftretens deutscher Ein-Euro-Münzen an. (5P)

Verwenden Sie diesen Wert ebenso wie die anderen relativen Häufigkeiten – auf zwei Nachkommastellen gerundet – für die nächsten Aufgabenteile als geschätzte Wahrscheinlichkeiten; für Luxemburg arbeiten Sie bei Teil e) bitte mit dem Wert $p_L = 0{,}002$.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

- Unter fünf Ein-Euro-Münzen befinden sich genau drei deutsche.
- Unter zehn Ein-Euro-Münzen befindet sich keine italienische Münze.
- Beim Zählen von vier einzelnen Ein-Euro-Münzen kommen nach einer deutschen drei nichtdeutsche Münzen. (15P)

d) In der letzten Woche sind 256 Ein-Euro-Münzen gezählt worden.

- Berechnen Sie die Erwartungswerte für die Anzahlen der italienischen und der spanischen Münzen.
- Eine der ausländischen Münzarten kam in dem Haufen von 256 Münzen 25-mal vor. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 256 Ein-Euro-Münzen genau 25 spanische Münzen sind, werde mit $P_E(25)$ bezeichnet, entsprechend $P_I(25)$ für die italienischen Münzen. Entscheiden Sie – ohne zu rechnen! – begründet, welche dieser beiden Wahrscheinlichkeiten größer ist.
- Als Q_{25} soll der Quotient $Q_{25} = \frac{P_E(25)}{P_I(25)}$ bezeichnet werden. Bestimmen Sie Q_{25}.

  Hinweis: *Wenn Sie Q_{25} aufschreiben, erkennen Sie, dass sich wesentliche unangenehme Terme wegkürzen.*
- Beschreiben Sie, was dann Q_{20} bedeutet, und entscheiden Sie, ob Q_{20} größer oder kleiner als Q_{25} ist. (25P)

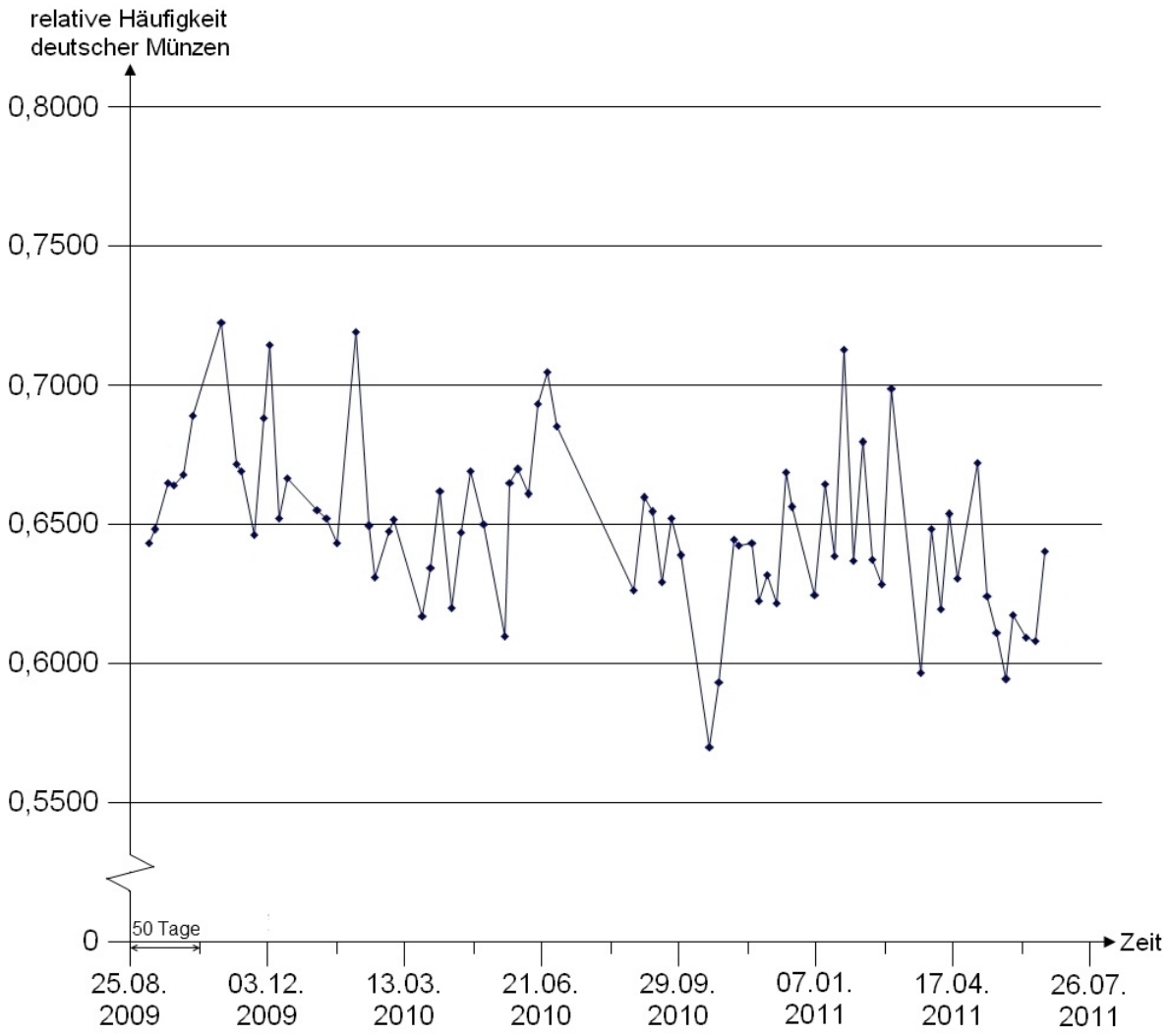
e) Im Monat April wurden 1180 Ein-Euro-Münzen eingenommen. Darunter befanden sich zwei luxemburgische Münzen.
Sie wissen, dass man die Poisson-Näherung verwenden kann, wenn bei einer großen Anzahl von Durchführungen wenige Erfolge zu erwarten sind. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 1180 Ein-Euro-Münzen höchstens zwei luxemburgische Münzen gefunden werden, sowohl mit Hilfe der Binomialverteilung als auch mit Hilfe der Poisson-Näherung und vergleichen Sie die Resultate. (25P)

f) Das Diagramm in der Anlage zeigt die relativen Häufigkeiten der deutschen Ein-Euro-Münzen für jede der Einzahlungen im Beobachtungszeitraum; jede der Einzahlungen enthielt mindestens 250 Ein-Euro-Münzen.

Nehmen Sie Stellung zu den Daten, die in diesem Diagramm dargestellt werden.

- Geben Sie dabei insbesondere eine mögliche Ursache für die verschiedenen zeitlichen Abstände der Datenpunkte an,
- ermitteln Sie einen Schätzwert für die Standardabweichung, bezogen auf eine einzelne Ein-Euro-Münze,
- interpretieren Sie die Tatsache, dass – ungeachtet der Schwankungen von Woche zu Woche – der Anteil der deutschen Münzen tendenziell abnimmt, und
- begründen Sie, welche Aussagen über den zukünftigen Anteil der deutschen Münzen daraus ableitbar sind. (25P)

Anlage zur Aufgabe „Ein-Euro-Münzen“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Der Anteil der deutschen Ein-Euro-Münzen ist in guter Näherung konstant, und das Ergebnis des „Ziehens“ der aktuellen Münze hängt weder von einer vorigen noch von einer folgenden Münze ab. Folglich ist die Modellierung des Vorgangs als ein Bernoulli-Experiment zulässig.		5	
b)	$h_D = \frac{15705}{24100} \approx 0,65 =: p_D$	5		
c)	• $P_{c1} = \binom{5}{3} \cdot {p_D}^3 \cdot (1-p_D)^2 \approx 0,34$ • $P_{c2} = (1-p_I)^{10} = (1-0,08)^{10} \approx 0,43$ • $P_{c3} = p_D \cdot (1-p_D)^3 \approx 0,03$	15		
d)	• $E_E = 256 \cdot 0,09 \approx 23$; $E_I = 256 \cdot 0,08 \approx 20,5$ • 25 liegt näher an der bei $n = 256$ erwarteten Münzen-Anzahl für Spanien als an der erwarteten Anzahl für Italien bei annähernd gleicher Standardabweichung. Deshalb muss $P_E(25)$ größer sein als $P_I(25)$. • Gefragt ist nach dem Quotienten $Q_{25} = \frac{P_E(25)}{P_I(25)}$. Beim Einsetzen kürzen sich die Binomialkoeffizienten weg, und man erhält: $Q_{25} = \left(\frac{p_E}{p_I}\right)^{25} \cdot \left(\frac{1-p_E}{1-p_I}\right)^{231} \approx 1,5$ *(Also ein Wert größer als 1, wie erwartet)* • Der entsprechende Quotient Q_{20} bezeichnet das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten dafür, dass 20 von 256 Münzen spanisch bzw. italienisch sind. Bei ungefähr gleicher Standardabweichung für die beiden Münzarten ist das Auftreten von 20 italienischen Münzen wahrscheinlicher als das von 20 spanischen, da E_I näher an 20 liegt als E_E. Also muss Q_{20} kleiner als 1 sein und damit kleiner als Q_{25}. *Oder:* $Q_{20} = \left(\frac{p_E}{p_I}\right)^{20} \cdot \left(\frac{1-p_E}{1-p_I}\right)^{236} \approx 0,8 < Q_{25}$	5	20	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	Zu bestimmen ist hier die Summe der Wahrscheinlichkeiten für $k = 0$, $k = 1$ und $k = 2$ mit $p_L = 0{,}002$: $P_{\text{bin}} = \left(B(1180, p_L, 0) + B(1180, p_L, 1) + B(1180, p_L, 2)\right) \approx 0{,}58 \approx 0{,}6$ $P_{\text{Poisson}} = \left(1 + \frac{1180 \cdot p_L}{1!} + \frac{(1180 \cdot p_L)^2}{2!}\right) \cdot e^{-1180 \cdot p_L} \approx 0{,}58 \approx 0{,}6$ *Es ist nicht sinnvoll, das Ergebnis mit höherer Genauigkeit anzugeben, da der Wert für p_L aus der Datenlage nicht genauer geschätzt werden kann.* Die berechneten Ergebnisse sind ununterscheidbar, insbesondere ist die Poisson-Näherung hier hervorragend anzuwenden.		25	
f)	*Dieser sehr offen gehaltene Aufgabenteil lässt viele sinnvolle Antworten zu.* • Die verschiedenen zeitlichen Abstände der Datenpunkte ergeben sich vor allem daraus, dass in den Ferien die Cafeteria nicht geöffnet ist. • Laut Angaben sind nie weniger als 250 Ein-Euro-Münzen eingezahlt worden; wenn wir hier von einer mittleren Einzahlung von 300 Münzen insgesamt ausgehen und einen Anteil der deutschen Münzen von 65 % annehmen, dann ist die Standardabweichung (für das gesamte Zählergebnis) $\sigma = \sqrt{300 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}35} \approx 8{,}3$ und die hier interessierende (auf eine einzelne Münze bezogene) „relative“ Standardabweichung $\sigma_{rel} = \frac{\sigma}{300} \approx 0{,}028$. *Bemerkung: Der Streifen mit einer Standardabweichung Breite um die Daten ist also praktisch so breit wie der waagerechte Linienabstand im Diagramm.* • Die Ein-Euro-Münzen aus den verschiedenen Ausgabeländern werden sich auf Dauer insbesondere durch Auslandsreisen immer stärker vermischen, wie man hier an dem starken Rückgang nach den Sommerferien 2010 erkennt. Dadurch nimmt der Anteil der deutschen Münzen tendenziell ab. • Die Frage ist hier, wie man diese Abnahme modelliert. Die mathematisch einfachste Idee wäre, in die Daten eine Gerade zu legen und den weiteren Verlauf aus dieser Geraden vorauszusagen. Wie weit eine solche lineare Prognose sinnvoll bleibt, ist allerdings fraglich – schließlich kann die relative Häufigkeit deutscher Münzen praktisch nicht unter den Anteil der deutschen Münzen an allen Ein-Euro-Münzen sinken (der bei etwa 20 % liegt). Deswegen liegt es nahe, hier über eine $e^{-\lambda \cdot t}$-Funktion nachzudenken, deren Zeitkonstante λ dann allerdings so groß ist, dass der Verlauf der Funktion im betrachteten Zeitintervall von einem linearen Verlauf praktisch nicht zu unterscheiden ist. *(Ein sinnvolles Modell für den zugehörigen Vorgang ist das der Diffusion, bei der der Vorgang tatsächlich durch eine $e^{-\lambda \cdot t}$-Funktion beschrieben wird.)*	5		20
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20