Analysis 1

I.1 Steuermodule

Nach der „Global Automotive Barometer"-Studie der Top-Managementberatung A.T. Kearney und Supplier-Business wird für die Autoindustrie 2011 bei weiterhin guten Aussichten trotzdem mit einem geringeren Wachstum gerechnet. Für die Zulieferindustrie besteht eine wesentliche Herausforderung in ihrer Position zwischen Rohmaterallieferanten und Automobilherstellern. Während die Einkaufspreise für die Zulieferer eine weiterhin steigende Tendenz aufweisen, wächst der Preisdruck durch die großen Autohersteller.

Um dem Preis- und Konkurrenzdruck standhalten zu können, spezialisieren sich kleinere Zulieferer oft auf wenige Produkte, die sie ggf. über Großhändler verkaufen. Durch entsprechende Verträge wird die vollständige Abnahme der Produktion garantiert.

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

Die SEAB-AG hat sich auf die Produktion von Steuermodulen für Airbags spezialisiert. Aufgrund der steigenden Nachfrage möchte das Unternehmen seine Produktionskapazität erweitern. Zu einer Produktionsmenge x gehören $120 \cdot x$ Steuermodule (1 PE $\triangleq$ 120) und eine Geldeinheit entspricht 1000 € (1 GE $\triangleq$ 1000€). Die Ökonomen des Unternehmens schätzen die zu erwartenden Kosten (bezogen auf einen festen, hier nicht weiter betrachteten Zeitraum) folgendermaßen ab:

i. Die Fixkosten werden mit rund 10 GE veranschlagt.

ii. Bei einer Produktionsmenge von 13 PE rechnet man mit Gesamtkosten von rund 30,6 GE.

iii. Bei einer Produktion von 6 PE betragen die Grenzkosten $0{,}4\,\frac{\text{GE}}{\text{PE}}$.

iv. Die Grenzkosten sind bei einer Produktion von 7,5 PE am geringsten.

a) Bestimmen Sie als Kostenfunktion $K:\ x \to K(x)$ ein Polynom möglichst geringen Grades, welches den Annahmen entspricht.

Zur Kontrolle und Weiterverwendung: $K(x) = \frac{1}{65} \cdot (2x^3 - 45x^2 + 350x) + 10$ (20P)

b)
- Bestätigen Sie, dass bei einem Verkaufspreis von 17,50 € pro Steuermodul (also $2{,}1\,\frac{\text{GE}}{\text{PE}}$) kein Gewinn gemacht werden kann.
- Ermitteln Sie den Minimalpreis $p_{\min}$, bei welchem das Unternehmen gerade noch bei einer dazu passenden Produktionsmenge kostendeckend arbeiten kann.
  Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Erlösfunktion $E_{\min}$ in die Anlage ein. (15P)

Die Verantwortlichen des Unternehmens gehen davon aus, dass sie mit steigender Produktionsmenge zur Abnahme der gesamten Produktion Preisnachlass gewähren müssen. In einer ersten Kalkulation soll der Grundpreis von $6\frac{\text{GE}}{\text{PE}}$ um 0,18 Geldeinheiten pro Produktionseinheit gesenkt werden.

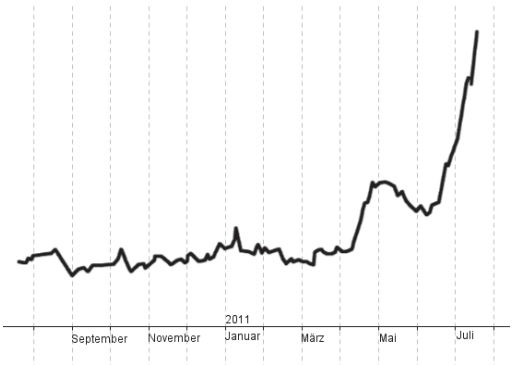
c) Geben Sie zur Produktionsmenge *x* den zugehörigen Preis *p(x)* an.
Ermitteln Sie eine dazu passende Funktionsgleichung der Erlösfunktion *E* und zeichnen Sie deren Graphen in die Anlage ein. Bestimmen Sie den maximalen Gewinn $G_{\max}$.(15P)

d) Die Ökonomen möchten die Gewinnerwartung auch für andere Rabatte prüfen. Sie gehen daher von dem verallgemeinerten Ansatz für die Preisfunktion $p_s(x) = 6 - s \cdot x$ mit dem Rabatt-Parameter *s* aus.

Beurteilen Sie, welche Werte für den Parameter s aus Sicht der Ökonomen sinnvoll sind. Geben Sie die Intervallgrenzen $s_{\min}$, $s_{\max}$ (mit $s_{\min} < s < s_{\max}$) auf zwei Nachkommastellen genau an.
Hinweis: Sehen Sie sich dazu die Erlösfunktionen für verschiedene Parameter s an. (20P)

Für die Herstellung der Steuerplatinen benötigt man Mikrochips. Die nebenstehende Grafik zeigt die Entwicklung des Einkaufpreises im vergangenen Jahr.

Nach dem Reaktorunglück in Japan März 2011 war die Produktion der Chips empfindlich gestört, was sich auf die Handelspreise auswirkte.



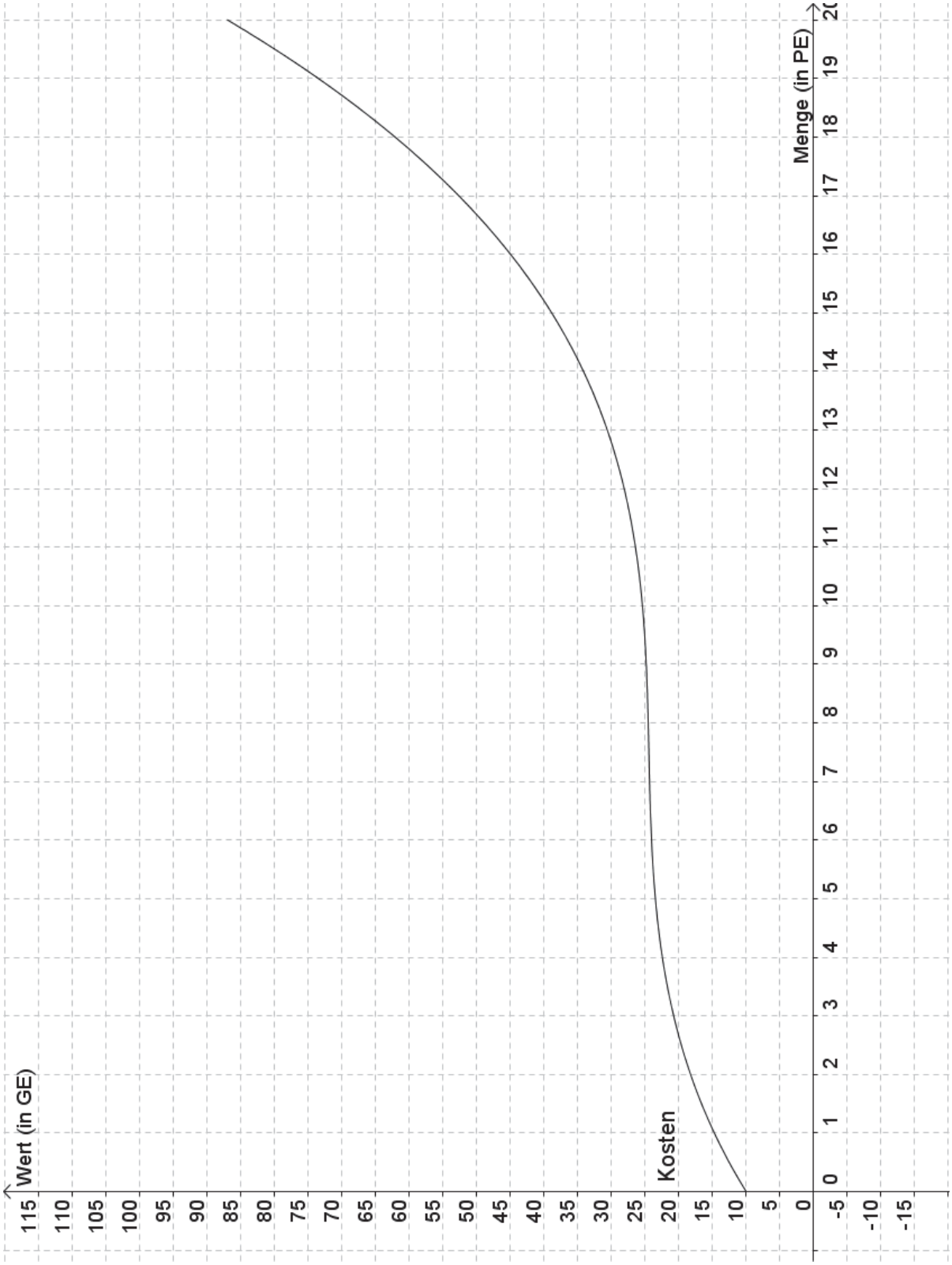
e) In der nachfolgenden Tabelle sind die Preise zu ausgewählten Zeiten von Anfang März bis Mitte Juni 2011 erfasst.
Bestimmen Sie unter Verwendung der Tabellenwerte eine Funktion f_{chip} , welche den zeitabhängigen Ankaufspreis für einen Mikrochip annäherungsweise wiedergibt. (10P)

vergangene Monate in 2011	3,23	3,48	3,80	4,57	5,30	5,75	6,13	6,44
Preis in €	2,50	3,05	3,72	3,51	2,90	4,06	5,38	6,75

f) Bestimmen Sie mithilfe Ihrer Funktion f_{chip} für den in der Tabelle erfassten Zeitraum von Anfang März ($t = 3,23$) bis Mitte Juni ($t = 6,44$) den durchschnittlichen Einkaufspreis p_{neu} für die Mikrochips. (10P)

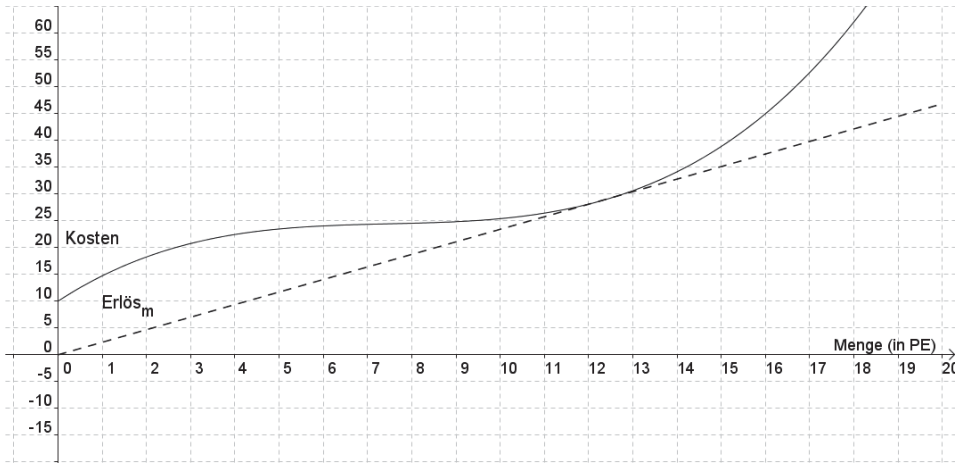
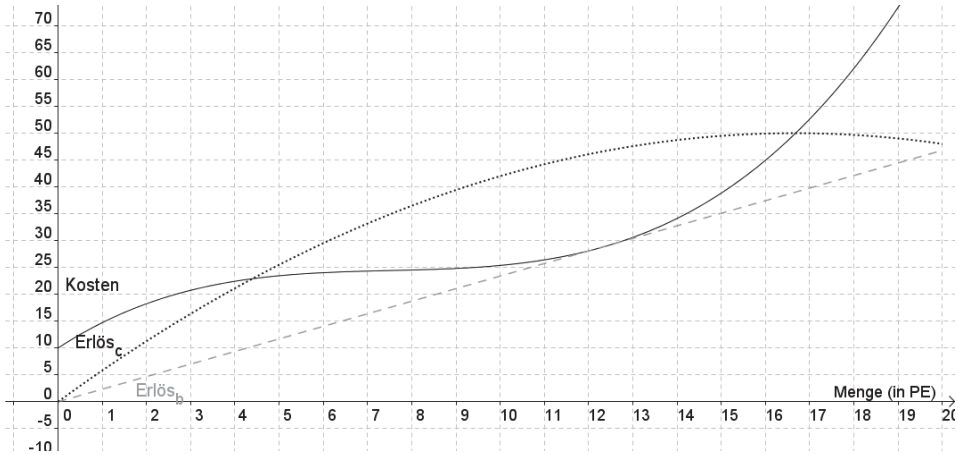
g) Entscheiden Sie begründet, welche der folgenden Aussagen die Auswirkungen dieses neuen Durchschnittspreises für einen Mikrochip auf den Graphen der Kostenfunktion *K* beschreibt.
   i. Der Graph von *K* wird um einen konstanten Wert nach oben verschoben.
   ii. Die Steigung des Graphen von *K* verändert sich um einen konstanten Wert.
   iii. Der Graph von *K* wird um einen konstanten Faktor gestreckt. (10P)

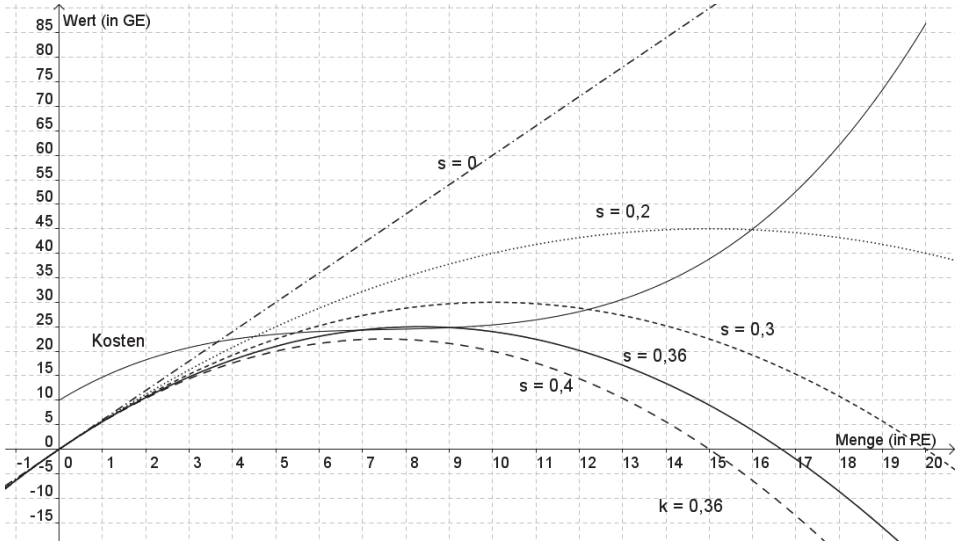
Anlage zur Aufgabe „Steuermodule“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Mit dem Ansatz: $K(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$ $K'(x)=3a\cdot x^2+2b\cdot x+c$ $K''(x)=6a\cdot x+2b$ (oder K', K'' „CAS-intern“ definieren) kann man das LGS aufstellen und lösen. $(I)\quad K(0)=10$ $(II)\quad K(13)=30{,}6$ $(III)\quad K'(6)=0{,}4$ $(IV)\quad K''(7{,}5)=0$ CAS liefert (Werte gerundet) $a\approx 0{,}031 \quad b\approx -0{,}692 \quad c\approx 5{,}385 \quad d=10$ Dies entspricht mit den exakten Werten der vorgegebenen Kontrollfunktion: $K(x)=\frac{1}{65}(2x^3-45x^2+350x)+10$.	10	10	
b)	Für den Preis $p_1=17{,}50\,\frac{\text{Euro}}{\text{Stück}}=2{,}1\,\frac{\text{GE}}{\text{PE}}$ ergibt sich die Erlösfunktion $E_1(x)=2{,}1\cdot x$, deren Graph unterhalb des Graphen der Kostenfunktion K verläuft. Daher ist kein Gewinn realisierbar. *Hinweis: Eine Argumentation mittels der Gewinnfunktion ist ebenfalls denkbar.* Man bildet z.B. die Stückkostenfunktion: $k(x)=\frac{K(x)}{x}=\frac{1}{65}(2x^2-45x^1+350)+\frac{10}{x}$ und die Ableitung: $k'(x)=\frac{1}{65}(4x^1-45)-\frac{10}{x^2}$ deren Nullstelle $x_m\approx 12{,}32\,(PE)$ führt zum minimalen Stückpreis $p_{\min}=k(x_m)\approx k(12{,}32)=2{,}3373...\approx 2{,}34$ ($\frac{\text{GE}}{\text{PE}}$) (*dies entspricht etwa* $19{,}50\,€$ *pro Modul*) und damit zur Erlösfunktion $E_{\min}(x)=2{,}34\cdot x$. Als Test wird erwartet : $k''(x_{\min})\approx 0{,}072>0$. *Hinweis: Der Nachweis, dass* $2{,}33\cdot x<K(x)$ *für alle Werte* $x\geq 0$ *ist hilfreich, wird aber nicht vom Schüler erwartet.* *Andere Lösungswege sind ebenfalls denkbar.*		15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
				
c)	Mit $p_{0,18}(x) = 6 - 0{,}18 \cdot x$ gilt $E_{0,18}(x) = 6 \cdot x - 0{,}18 \cdot x^2$. Die Grafik sieht nun so aus:  Man bildet die Gewinnfunktion $G(x) = E_{0,18}(x) - K(x) = -\frac{2}{65}x^3 + \frac{333}{650}x^2 + \frac{8}{13}x - 10$ und setzt deren Ableitung Null. Als inhaltlich sinnvolle Nullstelle ergibt sich $x_{\max} \approx 11{,}67\ (PE)$ mit dem zugehörigen Gewinn $G(x_{\max}) \approx 18{,}05\ (GE)$. Ein Test der hinreichenden Bedingung erfolgt mit der zweiten Ableitung bzw. einer Begründung aus der Graphik.	5	10	

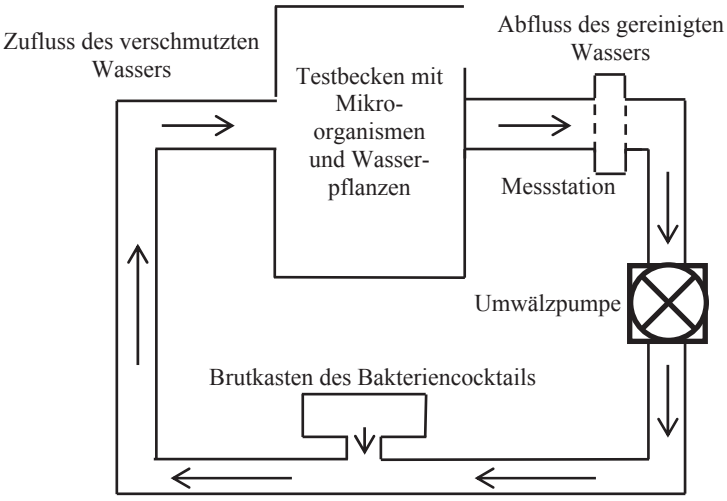
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Man überlegt sich schnell, dass $s_{\min} \geq 0$ sein muss, ansonsten hätte man eine Preiserhöhung mit steigender Produktion anstelle eines Rabatts, was unternehmerisch nicht durchzusetzen sein wird. Eine obere Schranke lässt sich gleichfalls ermitteln – für $s \geq 0,4$ liegt die Erlösfunktion im sinnvollen Produktionsbereich unterhalb der Kostenfunktion, man würde bei dieser Preisentwicklung also keinen Gewinn machen. Durch (graphisches) Einschachteln (Probieren) erhält man den Wert $s_{\max} \leq 0,36$ bei dem gerade noch ein Gewinn gemacht werden kann. *Hinweis: andere Lösungswege sind ebenfalls denkbar.* *Die Grafik gehört nicht zu den erwarteten Schülerleistungen. Der Hinweis auf das Einschachteln sollte aber in der Lösungsdarstellung vorkommen.*  		10	10
e)	Den Punkten in der Graphik bzw. dem Verlauf der Preisentwicklung ist zu entnehmen, dass die geforderte Kurve durch ein Polynom mindestens dritten Grades beschrieben werden kann. Regression ergibt – Koeffizienten auf drei Nachkommastellen gerundet: $f_{chip}(x) = 0,718x^3 - 9,865x^2 + 44,562x - 62,716$	10		
f)	Zu berechnen ist der gesuchte Mittelwert mit dem Integral. $\frac{1}{(6,44-3,23)} \int_{3,23}^{6,44} f_{chip}(t)dt \approx 3,762$ Der durchschnittliche Preis beträgt demnach ca. 3,76 € pro Mikrochip. (Bei Verwendung des Polynoms mit gerundeten Koeffizienten : 3,75€ pro Chip.)		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
g)	Korrekt ist die Aussage (ii). Der in f) berechnete Durchschnittswert entspricht dem Stückpreis eines Mikrochips. Verbaut werden aber x Produktionseinheiten zu je 120 Stück. Es müsste also der Term $\frac{1}{65} \cdot 350x$ der Kostenfunktion angepasst werden. Damit ändert sich die Steigung um einen konstanten Wert. (i) würde auf eine Veränderung der Fixkosten zurückgehen. (iii) eine Streckung der gesamten Funktion würde auch die Fixkosten betreffen. Das ist hier nicht gegeben.			10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Analysis 2

I.2 Waldseebad

Die Umweltbehörde einer Großstadt gibt ein Forschungsprojekt in Auftrag: Nach dem Vorbild des umweltfreundlichen Waldseebades der Kleinstadt Gaggenau soll in einem Stresstest untersucht werden, ob eine ähnliche Wasseraufbereitung ohne den Einsatz von Chemikalien für ein großstädtisches Freibad zu realisieren ist. Das Waldseebad besitzt eine Kette von so genannten Regenerationsteichen, in denen das Schwimmbadwasser durch Mikroorganismen und Wasserpflanzen gereinigt wird. Durch den Einsatz von Umwälzpumpen wird ein Wasserkreislauf über Schwimmbecken und Regenerationsteiche erzeugt. Gerade auf intensive Sonneneinstrahlung, bei der ja besonders viele Badegäste kommen, reagieren die Mikroorganismen und Wasserpflanzen mit optimaler Reinigungswirkung.



Während des Stresstests soll nun die starke Wasserbelastung in einem sehr gut besuchten Großstadtbad simuliert werden: Mithilfe eines "Brutkastens", der einen schwimmbadtypischen Bakteriencocktail enthält, wird Wasser mit exponentiell ansteigender Verschmutzung in ein Testbecken zugegeben (siehe Abbildung).

Anhand von Proben, die dem Abfluss dieses Testbeckens entnommen werden, soll dann untersucht werden, ob die Reinigungswirkung von Mikroorganismen und Wasserpflanzen für dieses Ausmaß an Wasserverunreinigung ausreichend sein kann. Zwei Forschungsgruppen mit unterschiedlichen Arbeitsansätzen nehmen in derselben Woche mit stabilem Sommerwetter Messungen vor.

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

Die **Forschungsgruppe A** führt folgende Messungen durch:

Von Montag bis Sonntag werden dem Abfluss des Testbeckens täglich um 15:00 Uhr (Sommerzeit) Wasserproben entnommen und ausgewertet.

Die Bakterienausstoßrate y am Abfluss des Testbeckens wird in $\frac{\mu g}{m^3 \cdot h}$ gemessen, also in 10^{-6} Gramm pro Kubikmeter und pro Stunde.

Tabelle A	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
x in Tagen	0,625	1,625	2,625	3,625	4,625	5,625	6,625
y in $\frac{\mu g}{m^3 \cdot h}$	2,05	2,19	2,29	2,37	2,52	2,67	2,78

Diese Messdaten sind in der Anlage graphisch dargestellt.

Da am Sonntagabend ein Wetterumschwung mit ergiebigen Regenfällen einsetzt, müssen die Messungen eingestellt werden. Der Stresstest soll daher für weitere Tage mithilfe einer mathematischen Modellierung fortgeführt werden.

a) Geben Sie eine exponentielle Regressionsfunktion f für die Messwerte der Tabelle A an.
(Hinweis: Sollten Sie die Funktion nicht bestimmen können, arbeiten Sie mit der Ersatzlösung $f_{Ersatz}(x) = 2 \cdot e^{0{,}05 \cdot x}$ weiter).
Skizzieren Sie den Graphen von f in die vorbereiteten Graphik (siehe Anlage). (10P)

b) Berechnen Sie $f(2{,}25)$ und $f(7{,}875)$.
Interpretieren Sie die Argumente und Funktionswerte im Sachzusammenhang. (15P)

Da es in den bestehenden Freibädern der Großstadt bisher wetterbedingt noch nie eine sonnige Badeperiode von mehr als zehn Tagen gab, hält die Umweltbehörde es für ausreichend, den Stresstest über einen Zeitraum von zwei Wochen laufen zu lassen. Für diesen Zeitraum stellt sie zwei Zielwerte auf:

Ziel I Die Bakterienausstoßrate am Abfluss bleibt unter einem Wert von 4,1 $\frac{\mu g}{m^3 \cdot h}$.

Ziel II Die Ausstoßmenge der gesamten ersten und die der gesamten zweiten Woche bleiben am Abfluss unter einem Wert von 600 $\frac{\mu g}{m^3}$.

c) Untersuchen Sie mithilfe der Modellfunktion f, ob der momentane Ausstoß den Zielwert I im zweiwöchigen Stresstestzeitraum übersteigt. (10P)

d)
- Bestätigen Sie, dass die Ausstoßmenge gemäß der Modellfunktion f am gesamten Mittwoch der ersten Woche rund 54,4 $\frac{\mu g}{m^3}$ betrug. *Hinweis: Achten Sie auf die Maßeinheiten.*
- Zeigen Sie außerdem, dass die Ausstoßmenge in der ersten Woche und die Ausstoßmenge in der zweiten Woche den Zielwert II bei Verwendung der Modellfunktion f nicht übersteigen.

(20P)

Die **Forschungsgruppe B** hat den Anspruch, eine genauere Modellfunktion g für die Bakterienausstoßrate zu entwickeln. Sie messen daher nicht nur einmal pro Tag, sondern täglich alle sechs Stunden. Auch diese Messungen werden über eine Woche durchgeführt und müssen am Sonntagabend wegen der Wetteränderung abgebrochen werden. Die Ergebnisse sind beispielhaft für Montag und Dienstag in der zweiten Tabelle angegeben:

Tabelle B	Mo				Di			
x in Tagen	0,125	0,375	0,625	0,875	1,125	1,375	1,625	1,875
y in $\frac{\mu g}{m^3 \cdot h}$	2,52	2,30	2,06	2,34	2,65	2,41	2,18	2,46

Für diese Messdaten entwerfen Wissenschaftler der Forschungsgruppe B die Modellfunktion g mit
$g(x) = 2 \cdot e^{0{,}05 \cdot x} \cdot \left(1 + \frac{\sin(\pi \cdot (x - 0{,}625))^2}{4}\right)$.

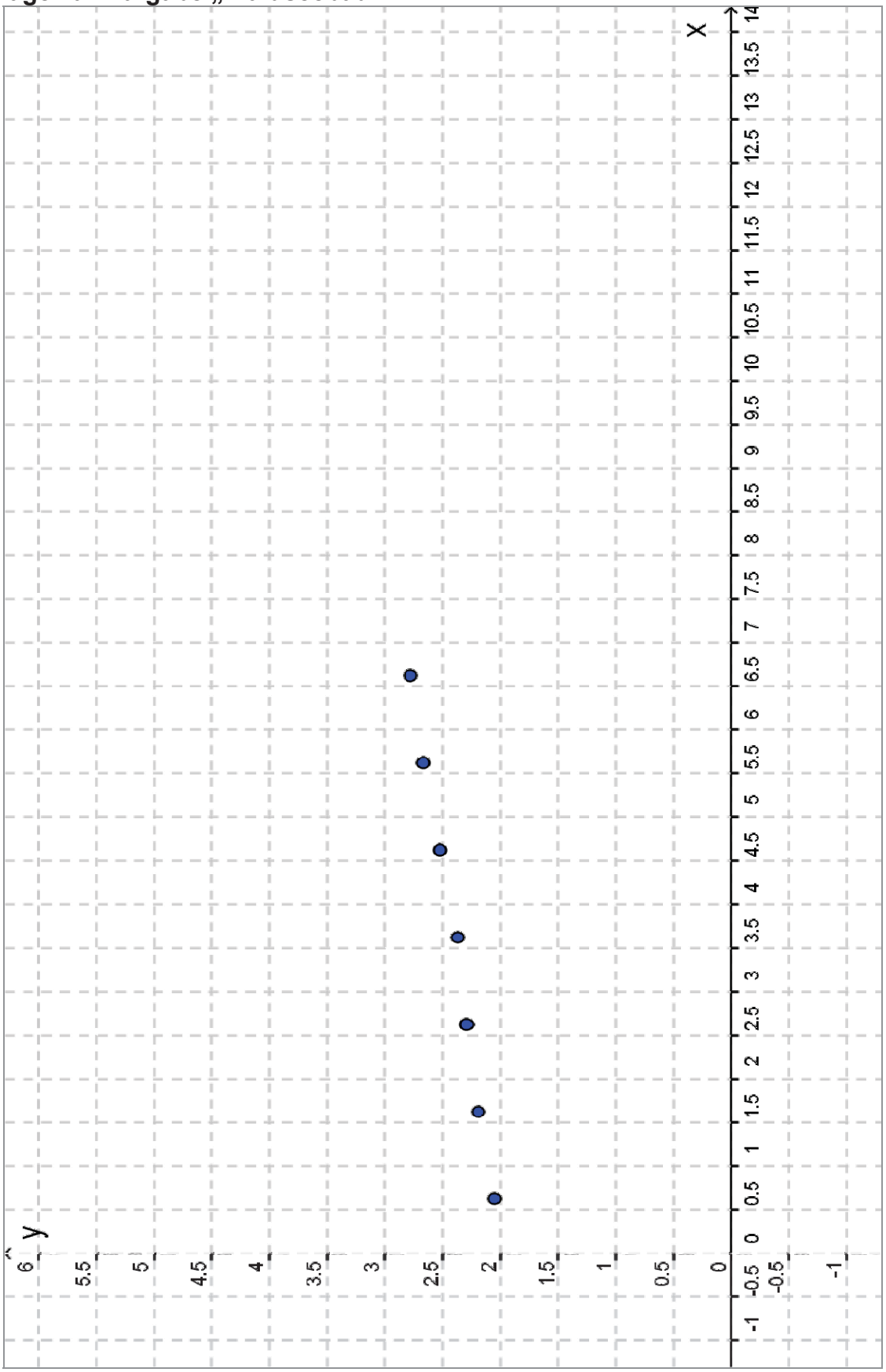
Hinweis: Ihr Rechner muss auf den Modus "Bogenmaß" eingestellt sein.

e)
- Zeichnen Sie die Messdaten der Tabelle B in die Graphik im Anhang ein.
  Skizzieren Sie außerdem den Graphen von g in die Graphik im Anhang.
- Vergleichen Sie die Graphen der beiden Modellfunktionen.
  Interpretieren Sie sorgfältig: Wie sind die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Graphen im Sachkontext zu erklären? (20P)

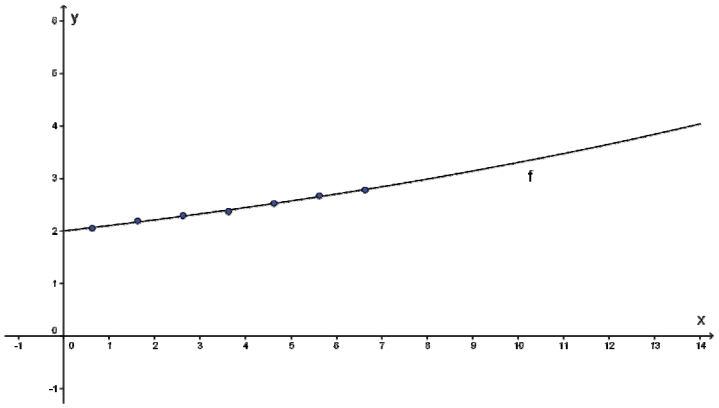
f) Die Forschungsgruppe B untersucht, wann der Zielwert I gemäß der Modellfunktion g zum ersten Mal überschritten wird. Das Computeralgebrasystem der Forscher liefert für den Gleichungsansatz $g(x) = 4{,}1$ die Lösungsmenge $L=\{12{,}8\}$ (bei einer Genauigkeit von einer Nachkommastelle).
Begründen Sie, dass diese Lösungsmenge mathematisch nicht korrekt ist und für die Fragestellung eine falsche Information gibt.
Ermitteln Sie graphisch, an welchem Tag der Zielwert I zum ersten Mal überschritten wird. (15P)

g) Die Forschergruppe B kommt zu dem Ergebnis, dass der Zielwert II ebenfalls nicht eingehalten werden kann.
Weisen Sie nach, dass die Forschungsgruppe B Recht hat. (10P)

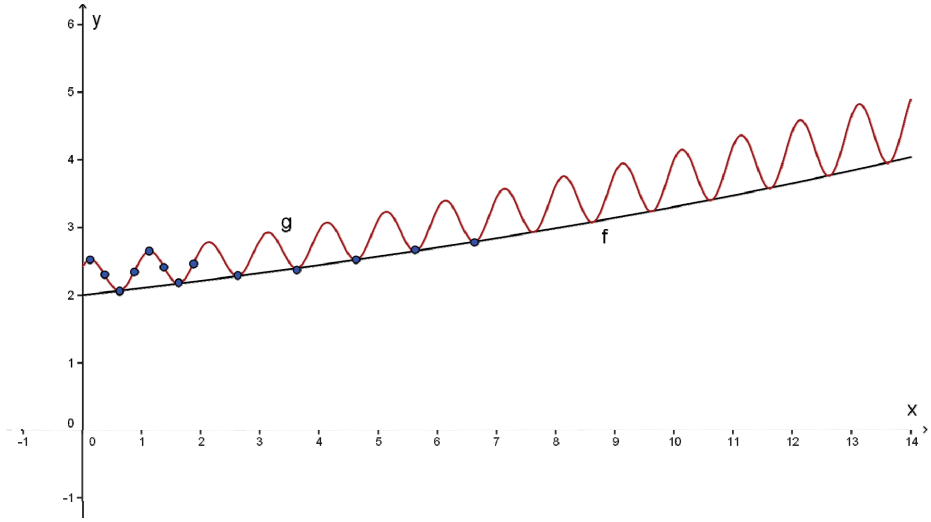
Anlage zur Aufgabe „Waldseebad“

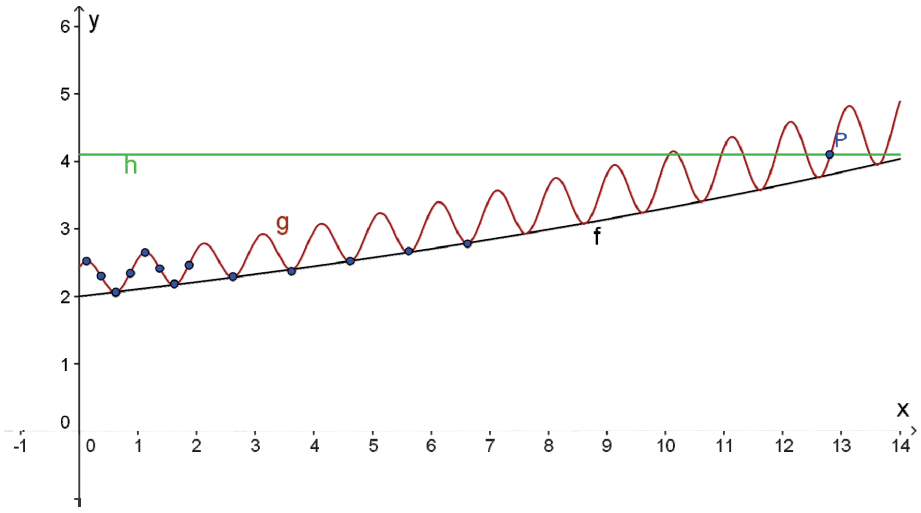


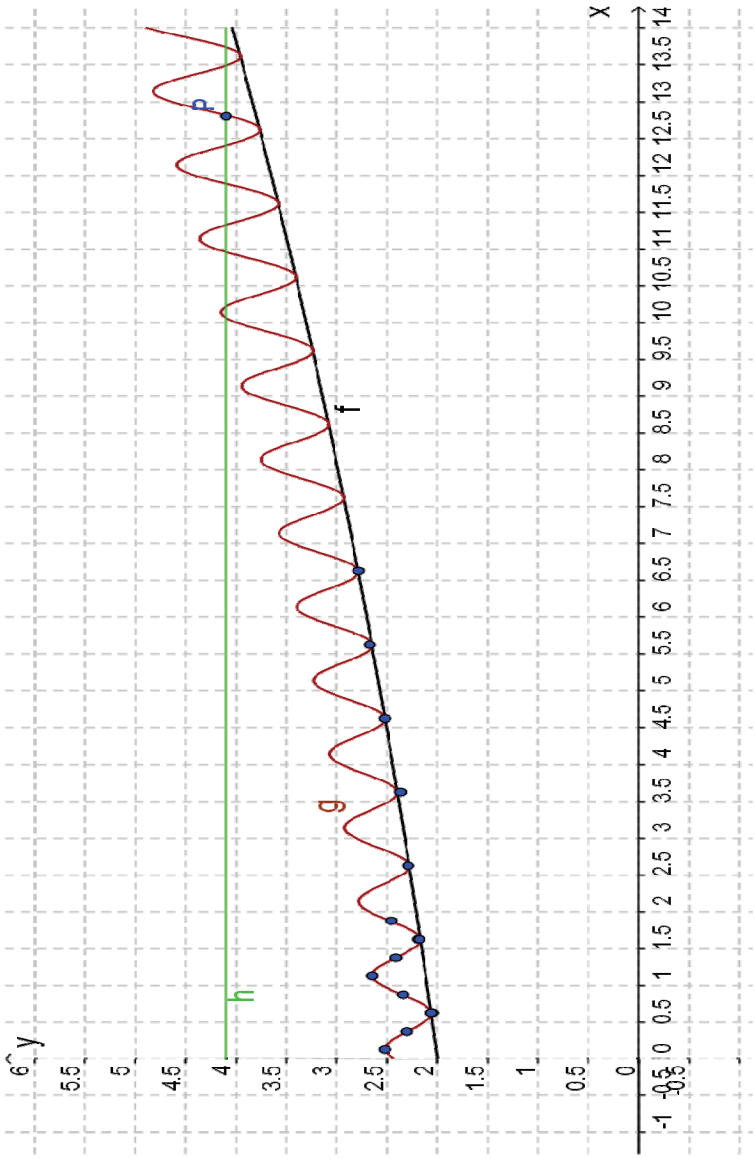
Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	*Hinweis: Die verschiedenen CAS liefern zum Teil unterschiedliche Rundungswerte – dies ist beim Vergleich mit der vorgegebenen Lösung zu beachten.* Mithilfe der exponentiellen Regression ergibt sich für f die Funktionsgleichung: $f(x) \approx 1{,}99881 \cdot e^{0{,}0502105 \cdot x} \approx 1{,}99881 \cdot 1{,}05149^x$.  Die Schülerskizze sollte erkennen lassen, dass der Graph keine Gerade ist, sondern eine gekrümmte, ständig ansteigende Funktion. Der Graph sollte bei $x = 0$ beginnen und über $x = 6{,}625$ hinausgehen. Der Graph für f_{Ersatz} unterscheidet sich im betrachteten Bildausschnitt nicht wahrnehmbar vom Graphen für f. *(Bei den insgesamt drei Lösungsgraphiken wurden wegen der Verkleinerung die Gitterlinien entfernt und eine gröbere Achseneinteilung gewählt. Am Ende der Lösung findet sich eine komplette Lösungsgraphik)*	10		
b)	$f(2{,}25) = 2{,}2378...$ und $f(7{,}875) = 2{,}9682...$. bzw. $f_{Ersatz}(2{,}25) = 2{,}2381...$ und $f_{Ersatz}(7{,}875) = 2{,}9650...$ Interpretation: Uhrzeitberechnung: $0{,}25 \cdot 24 = 6$ und $0{,}875 \cdot 24 = 21$ Gemäß der Modellfunktion f beträgt die Bakterienausstoßrate am Mittwoch der ersten Woche um 6:00 Uhr rund 2,24 $\frac{\mu g}{m^3 \cdot h}$ und am Montag der zweiten Woche um 21:00 Uhr rund 2,97 $\frac{\mu g}{m^3 \cdot h}$.	10	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	Die Ansatzgleichung $f(x)=4{,}1$ liefert die Lösung $x \approx 14{,}309$, für die Ersatzfunktion ergibt sich $x \approx 14{,}357$. Am Montag der dritten Woche wird nach dem Modell f der Zielwert I überschritten, das liegt gerade eben außerhalb des Stresstestzeitraums. Alternativ könnte $f(14) \approx 4{,}04$ bzw. $f_{Ersatz}(14) \approx 4{,}03$ berechnet werden. Mit der zusätzlichen Feststellung, dass f bzw. f_{Ersatz} streng monoton steigt, wird bestätigt, dass die Ausstoßraten in den ersten zwei Wochen gerade eben unterhalb von 4,1 $\frac{\mu g}{m^3 \cdot h}$ bleiben.		10	
d)	Die Berechnung der Ausstoßmenge am Mittwoch ist folgendermaßen möglich: $\int_2^3 f(x)dx \approx 2{,}26637 \frac{\mu g \cdot d}{m^3 \cdot h} \approx 2{,}26637 \cdot 24 \cdot \frac{\mu g \cdot h}{m^3 \cdot h} \approx 54{,}39308 \frac{\mu g}{m^3} \approx 54{,}4 \frac{\mu g}{m^3}$, bei der Verwendung von f_{Ersatz} ergibt sich derselbe gerundete Wert. Bestimmung der Ausstoßmenge für die erste Woche: $\int_0^7 f(x)dx \cdot 24 \approx 402{,}4 \quad (\text{in} \frac{\mu g}{m^3})$, bzw. $402{,}3 \frac{\mu g}{m^3}$ bei Verwendung von f_{Ersatz}. Bestimmung der Ausstoßmenge für die zweite Woche: $\int_7^{14} f(x)dx \cdot 24 \approx 571{,}8 \quad (\text{in} \frac{\mu g}{m^3})$, bzw. $570{,}9 \frac{\mu g}{m^3}$ bei Verwendung von f_{Ersatz}. Die Ausstoßmenge der ersten Woche bleibt deutlich unter dem Zielwert II von 600 $\frac{\mu g}{m^3}$, die Ausstoßmenge der zweiten Woche bleibt knapp unter diesem Zielwert. Das zweite Ziel ist also gemäß der Modellfunktion f bzw. f_{Ersatz} erfüllt.		20	
e)	Die Prüflinge tragen die acht Punkte ein, zwei davon stimmen im Rahmen der Zeichengenauigkeit mit Punkten der ersten Forschungsgruppe überein. Den Graphen der Funktion *g* können die Prüflinge mithilfe einer CAS-Graphik als Vorbild skizzieren. Die Sinusschwingung sollte deutlich von einer "Zickzackkurve" zu unterscheiden sein. Eine gute Zeichengenauigkeit wird nur für die ersten zwei Tage erwartet. Im weiteren Verlauf sollten die mit der Zeit wachsenden Ausschläge deutlich werden.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	 Vergleich der beiden Kurven: Der Graph von *g* enthält – im Rahmen der Zeichengenauigkeit die Messpunkte des Graphen von *f*. Diese Punkte bilden für *g* aber lokale Minima einer Schwingung, während der Graph von *f* streng monoton steigt. Erklärung der Unterschiede: Forschungsgruppe A hat jeweils um 15:00 gemessen und damit offensichtlich jeweils den Zeitpunkt des Tages gewählt, für den die Belastung des Wassers am niedrigsten ist, bzw. für den die biologische Reinigungswirkung am größten ist. Nach intensiver Sonnenbestrahlung arbeiten die Mikroorganismen und Wasserpflanzen am effektivsten. Etwa um 13:00 (Mitteleuropäische Sommerzeit) ist der höchste Sonnenstand. In den darauf folgenden Stunden werden am meisten Bakterien des verunreinigten Wassers vernichtet. Bei mehreren Messungen pro Tag, wie sie die Forschungsgruppe B vorgenommen hat, wird diese über den Tag schwankende Reinigungswirkung erst beobachtbar.	10		10
f)	*Hintergrundinformation: Eine Derive-Version liefert diese fehlerhafte Lösungsmenge (sie entspricht der siebten Schnittstelle von g und h).* Schon aus der selbst angefertigten Skizze für den Graphen von *g* sollte leicht ersichtlich sein, dass der Wert $g(x) = 4{,}1$ zum ersten Mal deutlich früher überschritten wird. Auch ist der Skizze klar zu entnehmen, dass die Ansatzgleichung mehrere Lösungen aufweisen muss (sollte die selbst angefertigte Skizze zu ungenau sein, kann der Prüfling eine CAS-Graphik zu Hilfe nehmen).			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	 An welchem Tag genau der Zielwert 4,1 zum ersten Mal überschritten wird, lässt sich aus einer Handskizze nicht unbedingt ermitteln. Einer CAS-Graphik im sinnvollen Ausschnitt kann man entnehmen, dass der Grenzwert am neunten Tag noch nicht überschritten wird und dass er am zehnten Tag vorübergehend überschritten wird.		5	10
g)	Untersuchung der Ausstoßmenge pro Woche: $\int_0^7 g(x)dx \cdot 24 \approx 452{,}3$ $\int_7^{14} g(x)dx \cdot 24 \approx 641{,}9$ In der zweiten Woche wird der Zielgrenzwert II also überschritten.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
				
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

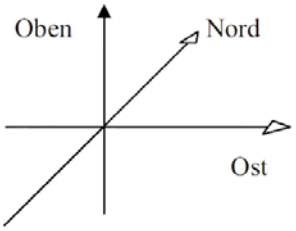
LA/AG 1

II.1 Sportflieger

Es werden Bewegungen im Bereich des Flugplatzes Neddermiddelfehn betrachtet. Dieser Flugplatz wird von Sport- und Kleinflugzeugen genutzt. Die Kleinflugzeuge stellen die Verkehrsverbindung zu einigen nahe gelegenen Urlauberinseln her.

Alle Koordinatenangaben sind in der Maßeinheit Kilometer gegeben, die Parametergröße t in Minuten.

Die Bedeutung und Orientierung der Koordinatenachsen sind gemäß der nebenstehenden Abbildung zu verstehen:



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ost \\ Nord \\ Oben \end{pmatrix}$$

Der Tower des Flugplatzes hat seinen Fußpunkt bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$. Der Kontrollraum liegt in zehn Meter Höhe, sein Ort kann also durch den Punkt $M(0\,|\,0\,|\,0{,}01)$ beschrieben werden.

Das Kleinflugzeug F_1 startet zum Zeitpunkt $t = 0$ für einen Krankentransport. Zur Vereinfachung wird die Flugbahn während des Beobachtungszeitraums für die Zeit zwischen null und zwei Minuten (also $t \in [0;2]$) als annähernd geradlinig und die Geschwindigkeit v, mit der sich das Flugzeug bewegt, als konstant betrachtet.

Modell der Flugbahn von F_1: $g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}8 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

a)
- Beschreiben Sie die Lage des Startpunktes vom Flugzeug F_1 in Bezug auf den Tower.
- Beschreiben Sie, in welche Richtung sich F_1 bewegt.
- Bestätigen Sie, dass die Geschwindigkeit von F_1 nach diesem Modell zwischen 110 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ liegt. (20P)

b) Aus technischen Gründen sollte der Startwinkel dieser Kleinflugzeuge (Winkel zwischen Flugbahn und Startbahn) zwischen 22° und 26° liegen. Untersuchen Sie, ob der Startwinkel für das Flugzeug F_1 gemäß dem Modell in diesem Bereich liegt. (15P)

Ein anfliegendes Sportflugzeug F_2 hat zum Zeitpunkt $t=-3$ (also drei Minuten vor dem Startzeitpunkt des Flugzeugs F_1) wegen des frei gegebenen Starts des eiligen Krankentransports keine Landeerlaubnis bekommen. Flugzeug F_2 wird daher in eine Bahn dirigiert, die sich im Beobachtungszeitraum $[-3;2]$ näherungsweise durch folgende Kurve beschreiben lässt:

$$p_t:\vec{x}=\begin{pmatrix}0{,}3\\0{,}14\\0{,}5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-0{,}192\\-0{,}12\end{pmatrix}+t^2\cdot\begin{pmatrix}0\\0{,}16\\0{,}1\end{pmatrix} \text{ oder gleichwertig durch } p_t:\vec{x}=\begin{pmatrix}2t+0{,}3\\0{,}16t^2-0{,}192t+0{,}14\\0{,}1t^2-0{,}12t+0{,}5\end{pmatrix}.$$

Diese Bahn ist in der Anlage dargestellt.

In der Tabelle sind Bahnpunkte für drei verschiedene Zeitpunkte angegeben.

t	–3	–1,5	0	1	2
P_t	$(-5{,}7\,\vert\,2{,}156\,\vert\,1{,}76)$	$(-2{,}7\,\vert\,0{,}788\,\vert\,0{,}905)$		$(2{,}3\,\vert\,0{,}108\,\vert\,0{,}48)$	

c)
- Berechnen Sie die Koordinaten für die fehlenden Bahnpunkte der Tabelle.
  Ergänzen Sie alle fünf Punkte in der Graphik in der Anlage.
- Zeichnen Sie außerdem auch die Bahn des Krankentransports (Flugzeug F_1) für den Beobachtungszeitraum ein. (15P)

d)
- Geben Sie die Ebene an, in der die drei gegebenen Punkte der Tabelle liegen.
  Bestimmen Sie als Endergebnis eine Koordinatengleichung.
  (Kontrollergebnis: Die gesuchte Ebene kann durch die Koordinatengleichung $E:\ 5x_2-8x_3=-3{,}3$ dargestellt werden.)
- Weisen Sie nach, dass die Punkte der Bahn p_t für jeden Wert von $t\in[-3;2]$ in dieser Ebene liegen. (15P)

Ein Beobachter aus dem Dorf Neddermiddelfehn behauptet, dass sich die Bahnen der beiden Flugzeuge geschnitten hätten.

e)
- Um die Behauptung des Beobachters zu prüfen, bestimmen Sie zunächst den tiefsten Punkt der Bahn p_t.
- Ermitteln Sie außerdem den Durchstoßpunkt D der Geraden g_t durch die Ebene E.
- Begründen Sie nun, dass die Behauptung falsch ist.
- Entscheiden Sie, ob es zwingend zur Kollision der Flugzeuge gekommen wäre, wenn die Behauptung des Beobachters wahr gewesen wäre. (20P)

f) Flarmgeräte sind Kollisionswarngeräte für Kleinflugzeuge. Bevor die Sportflieger vom Fliegerverein Neddermiddelfehn diese Geräte in ihren Flugzeugen einsetzen, sollen zunächst vom Kontrollraum des Towers aus verschiedene Geräte getestet werden. Zurzeit ist ein Gerät mit einer Reichweite von zwei Kilometern im Testverfahren.
Hinweis: Die Rundungswerte können je nach verwendetem CAS etwas variieren.

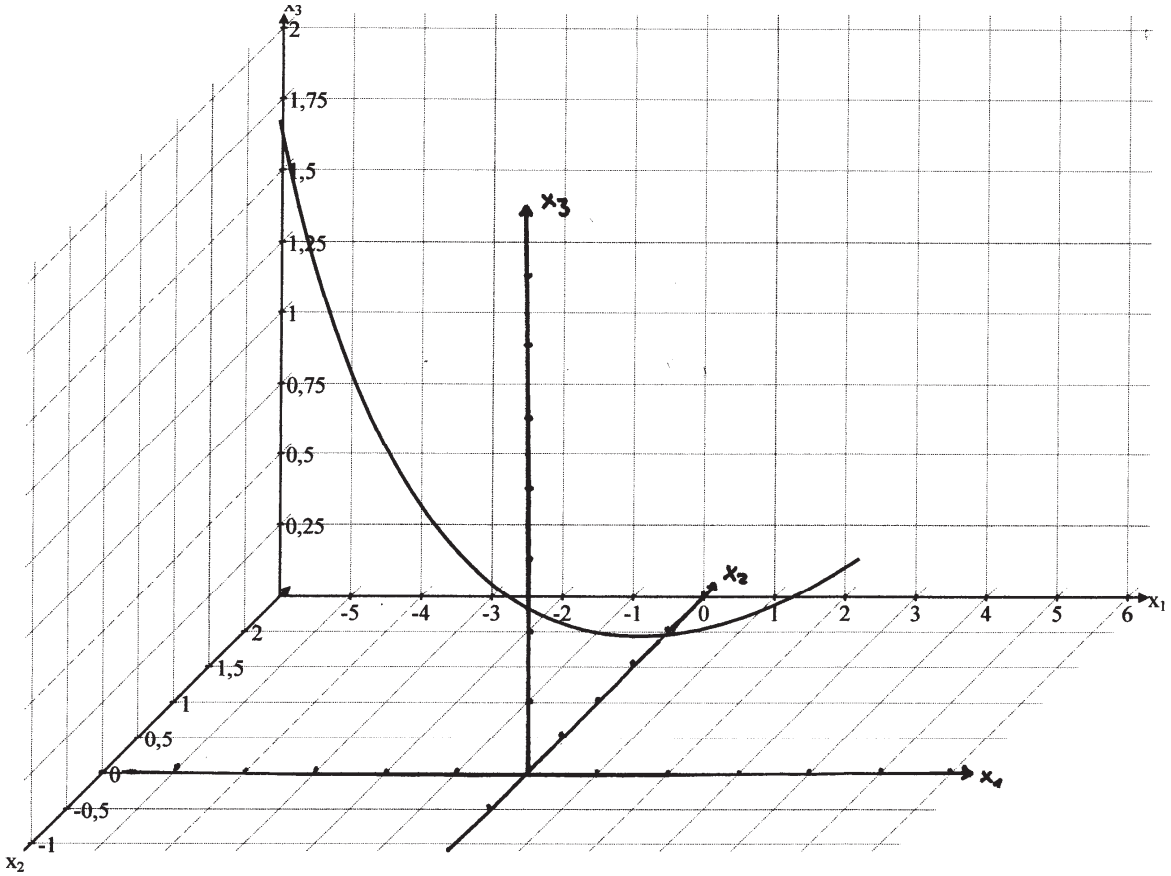
- Zeigen Sie, dass das Sportflugzeug F_2 im Punkt $P(-1,791\,|\,0,516\,|\,0,735)$ in den Empfangsbereich des Flarmgeräts zum Zeitpunkt $t_P = -1,046$ Minuten eintritt (Werte gerundet).

- Das Sportflugzeug verschwindet aus dem Empfangsbereich im Punkt $Q(1,945\,|\,0,090\,|\,0,469)$ zum Zeitpunkt $t_Q = 0,822$ Minuten (Werte gerundet).

  Ein Sportflieger ermittelt aus den vorhandenen Messdaten eine Durchschnittsgeschwindigkeit von rund 121 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ für das Flugzeug F_2 im Empfangszeitraum.

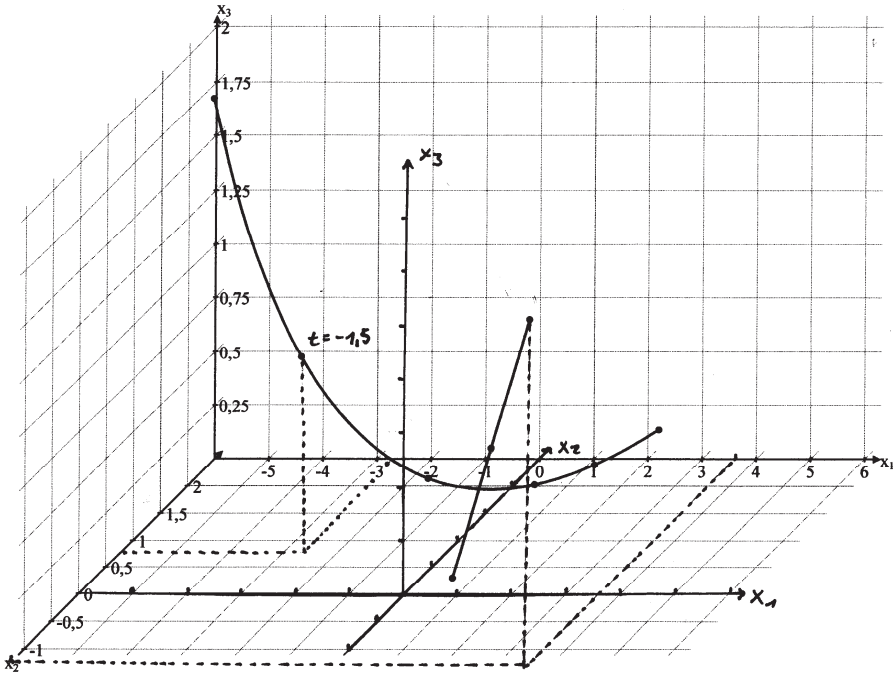
  Beurteilen Sie dieses Ergebnis. (15P)

Anlage zur Aufgabe „Sportflieger“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Der Startpunkt von F_1 liegt 600m östlich und 300m nördlich vom Tower. Der Flieger bewegt sich etwa in südöstlicher Richtung (genauer Ostsüdost, wird von Schülern nicht erwartet). Bestimmung der Geschwindigkeit (möglicher Lösungsweg): In einer Minute ergibt sich eine Verschiebung um den Richtungsvektor: $\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}8 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$. Der Betrag dieses Vektors ist $1.878829422 \approx 1{,}879$, er gibt die zurückgelegten Kilometer in einer Minute an. Daraus ergibt sich die Geschwindigkeit $v \approx 112{,}7\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Sie liegt also im angegebenen Intervall.	10	10	
b)	Zunächst könnte z.B. der Winkel β zwischen der Flugbahn und der Normalen zur Rollbahn bestimmt werden. Für den gesuchten Winkel α gilt dann $\alpha = 90° - \beta \quad \cos\beta \approx \dfrac{\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}8 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{1{,}878829422 \cdot 1} \Rightarrow \beta \approx 64{,}80° \Rightarrow \alpha \approx 25{,}20°$. Der Startwinkel liegt im oberen Bereich des empfohlenen Intervalls.	10	5	
c)	In eine der p_t-Gleichungen wird $t = 0$ bzw. $t = 2$ eingesetzt. Daraus ergeben sich $P_0(0{,}3 \mid 0{,}14 \mid 0{,}5)$ und $P_2(4{,}3 \mid 0{,}396 \mid 0{,}66)$. Für die Zeichnung der Flugbahn g_t müssen mindestens die zwei Begrenzungspunkte eingetragen und durch einen Strecke verbunden werden, für $t = 0$ $(0{,}6 \mid 0{,}3 \mid 0)$ und für $t = 2$ $(3{,}6 \mid -1{,}3 \mid 1{,}6)$. In der Lösungsgraphik ist beispielhaft eine mögliche Konstruktion des Parabelpunktes für $t = -1{,}5$ eingetragen.			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
		10	5	
d)	Möglicher Lösungsweg: Mithilfe der drei in der Tabelle gegebenen Punkte kann die gesuchte Ebene E z.B. durch folgende Parameterdarstellung aufgestellt werden: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5,7 \\ 2,156 \\ 1,76 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1,368 \\ -0,855 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2,048 \\ -1,28 \end{pmatrix}$ Diese Darstellung kann z.B. wie folgt in eine Koordinatengleichung umgewandelt werden: Ein Normalenvektor für E wird z.B. über $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ (Kreuzprodukt der Richtungsvektoren der Parameterdarstellung) ermittelt, $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4,8 \end{pmatrix}$. Daraus kann eine Normalenform aufgestellt werden: $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -5,7 \\ 2,156 \\ 1,76 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4,8 \end{pmatrix} = 0$ Durch Ausmultiplizieren ergibt sich hier die Koordinatengleichung $E: -3x_2 + 4,8x_3 = 1,98$. Um auf die vorgegebene Gleichung $5x_2 - 8x_3 = -3,3$ zu kommen, was aber nicht gefordert ist, wird obige Gleichung mit dem Faktor $-\frac{5}{3}$ multipliziert. *Hinweis: Andere Lösungswege sind möglich.*			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	Beispielsweise durch Einsetzen des Ausdrucks $p_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2t+0,3 \\ 0,16t^2-0,192t+0,14 \\ 0,1t^2-0,12t+0,5 \end{pmatrix}$ in die gegebene Koordinatengleichung bestätigt man $5\cdot(0,16t^2-0,192t+0,14)-8\cdot(0,1t^2-0,12t+0,5)=-3,3$. Damit ist bestätigt, dass die Punkte der Bahn p_t für alle $t\in[-3;2]$ in der Ebene E liegen. *Andere Argumentationswege sind möglich.*		10	5
e)	Der tiefste Punkt der Bahn ist der Punkt mit dem niedrigsten x_3-Wert, also muss nur die Funktion f mit $f(t)=0,1t^2-0,12t+0,5$ untersucht werden. Durch Rechnung z.B. mit der Ableitungsfunktion von f ergibt sich der tiefste Wert bei $t=0,6$. $f(0,6)=0,464$. Der tiefste Punkt der Bahn ist also $T(1,5\,\|\,0,0824\,\|\,0,464)$. In die Ebene E wird der Ausdruck der Geraden $g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,6+1,5t \\ 0,3-0,8t \\ 0,8t \end{pmatrix}$ eingesetzt: Daraus ergibt sich $5\cdot(0,3-0,8t)-8\cdot(0,8t)=-3,3$ (bei Verwendung der vorgegebenen Ebenengleichung). Als Lösung ergibt sich der Wert $t=0,462$ und der Durchstoßpunkt $D=(1,292\,\|\,-0,069\,\|\,0,369)$. Mögliche Argumentation, um die Behauptung zu widerlegen: Der tiefste Punkt der Parabel von F_2 hat die x_3-Komponente 0,464, die gesamte Bahn verläuft also ab einer Höhe von 464 Metern. Der Punkt der geraden Bahn von F_1 läuft also bei einer Höhe von 369 Metern unterhalb der Parabelbahn. Erst nach dem Durchstoßen der Parabelebene E steigt das Flugzeug F_1 höher. *<u>Bemerkung:</u> Man kann auch versuchen direkt die beiden Bahnen mit einer Gleichung zum Schnitt zu bringen. Dabei muss dann darauf geachtet werden, dass für die beiden Parameter (die dann nicht mehr die Bedeutung einer Zeit haben,) verschiedene Variable gewählt werden. Das CAS liefert dann die Unlösbarkeit dieser Gleichung.* Die Behauptung, dass die Bahnen sich geschnitten haben, bedeutet nicht automatisch, dass sich die Flugzeuge treffen, denn sie können den Schnittpunkt zu verschiedenen Zeiten passiert haben. Es käme also nicht zwingend zur Kollision (vgl. obige Bemerkung).		10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Zur Ermittlung von Punkt P kann eine Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius 2 aufgestellt werden: $\left(\vec{x}-\vec{m}\right)^2 = 2^2$ Dann kann $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2t+0,3 \\ 0,16t^2-0,192t+0,14 \\ 0,1t^2-0,12t+0,5 \end{pmatrix}$ (*)eingesetzt werden und anschließend ausmultipliziert werden, so dass eine Bedingungsgleichung für t entsteht, zum Beispiel in der Form $4\cdot 10^{-6}(8900t^4-2,136\cdot 10^4 t^3+1,048516\cdot 10^6 t^2+2,5716\cdot 10^5 t+8,7425\cdot 10^4)=4$ (Derive-Version). Über den solve-Befehl erhält man $t=-1,0456... \vee t=0,8222...$. Hiermit ist der Zeitpunkt t_Q bestätigt. Einsetzen von t_Q für t in (*) liefert den Ortsvektor des Punktes P. Aus den Angaben für P und Q lässt sich z.B. der Abstand d der beiden Punkte ermitteln. $\vec{p}-\vec{q} = \begin{pmatrix} -3,736 \\ 0,426 \\ 0,266 \end{pmatrix}$. Der Betrag dieses Vektors liefert $d=3,769$ (bzw. 3,770 bei Verwendung der gerundeten Werte). $t_Q - t_P = 1,868$ Minuten. $v_{Durchschnitt} = \frac{3,769}{1,868}\cdot 60 = 121,06 \approx 121$. Da die Parabelbahn des Sportflugzeuges länger ist als die Strecke von P nach Q, muss die Geschwindigkeit jedoch größer sein als dieser Wert. *Hinweis: Andere Lösungswege sind für beide Teilaufgaben möglich.*		10	5
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

LA/AG 2

II.2 Kormorane

Der Kormoran wurde im Jahr 2010 zum Vogel des Jahres gewählt. Er ernährt sich hauptsächlich von Fischen, so dass es in der Nähe von Brutgebieten häufig zu Konflikten zwischen Naturschützern und Fischern kommt. Kormorane werden zwischen dem dritten und vierten Jahr geschlechtsreif und legen dann drei bis vier Eier. Die erstgeschlüpften Jungtiere haben eine hohe Überlebenschance, während die später geschlüpften Jungtiere häufig nach einigen Tagen verhungern.

Laut NABU beträgt die Bruterfolgsquote etwa 1,75 Jungtiere. Beobachtungen im Naturschutzgebiet Anklamer Stadtbruch in Mecklenburg-Vorpommern aus den letzten Jahren haben zu folgendem mathematischen Modell mit der Matrix L für die jährliche Veränderung der Kormoranpopulation geführt. Das Modell teilt die Kormorane in vier Altersklassen auf (Klasse A: 0-1. Jahr, Klasse B: 2. Jahr, Klasse C: 3. Jahr, Klasse D: 4. Jahr oder älter). In den folgenden Aufgaben ist die Reihenfolge (von links nach rechts / von oben nach unten) der Klassen immer A, B, C, D.

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1{,}75 \\ 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}82 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}79 & 0{,}62 \end{pmatrix}$$

a)
- Zeichnen Sie das Übergangsdiagramm zur Matrix L (siehe Anlage).
- Interpretieren Sie alle Werte der ersten und letzten Spalte der Matrix L im Sachzusammenhang. (15P)

Aktuell verteilt sich die Population der Kormorane im Naturschutzgebiet Anklamer Stadtbruch wie folgt auf die verschiedenen Altersklassen:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2021 \\ 1576 \\ 1106 \\ 1094 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Modells die Gesamtzahl der Kormorane.
- im nächsten Jahr.
- in 10 Jahren. (10P)

c) Der NABU behauptet, dass in dieser Population die Gesamtzahl vom vergangenen zu diesem Jahr um 2000 Vögel gesunken ist.
Untersuchen Sie diese Behauptung mit Hilfe des Modells. (15P)

d) • Beschreiben Sie, wie sich die Kormoranpopulation nach dem Modell langfristig (d.h. über einen Zeitraum von mindestens 50 Jahren) entwickelt.

• Interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang und beurteilen Sie das mathematische Modell. (20P)

Hinweis: Stellen Sie Ihr CAS gegebenenfalls so ein, dass Berechnungen mit komplexen Zahlen möglich sind. Zur Bearbeitung der Aufgabe genügt es, nur die reellen Ergebnisse zu betrachten.

Das starke Wachstum der Kormoranpopulation heizt den Streit zwischen den Vogelschützern und den Fischern an. Die Fischer befürchten, dass die wachsende Kormoranpopulation die gesamten Gewässer in der näheren Umgebung des Naturschutzgebiets leerfischen wird. Die beiden Gruppen einigen sich auf ein Ziel. Sie möchten eine stabile Kormoranpopulation herstellen.

e) Untersuchen Sie, ob eine solche Population nach dem Modell möglich ist, und geben Sie diese gegebenenfalls an. (10P)

Der NABU berichtet über eine Tötungsaktion am Bodensee. Dort sind Mitarbeiter des Regierungspräsidiums Freiburg in einer kalten Nacht in eine Brutkolonie der Kormorane eingedrungen und hatten die brütenden Vögel mit Scheinwerfern aufgeschreckt, damit die Gelege auskühlen und absterben sollten. Die Fischer diskutieren, ob sie mit einer ähnlichen Vorgehensweise alle Tiere der Altersklasse A töten wollen.

f) • Ermitteln Sie die Anzahl der Kormorane, wenn die Fischer diesen Plan für das kommende bzw. die nächsten beiden aufeinander folgenden Jahre in die Tat umsetzen würden.

• Bestimmen Sie den Zeitraum, der nötig wäre, damit sich die Population nach einer solchen ein- bzw. zweijährigen Aktion wieder erholt, also mindestens den Vorbestand von 5797 Tieren erreicht hätte und dauerhaft über diesem Wert bleibt. (20P)

Die Naturschützer verhindern dieses Vorgehen. Im darauffolgenden Jahr zeigen Beobachtungen, dass sich die Gesamtpopulation der Kormorane trotzdem nicht vergrößert hat. Dieses Phänomen wird durch Abwanderung von Jungvögeln, also Tieren der Altersklasse B erklärt. Die veränderte Matrix sieht nun so aus:

$$L_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1{,}75 \\ 0{,}3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}82 - x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}79 & 0{,}62 \end{pmatrix}$$

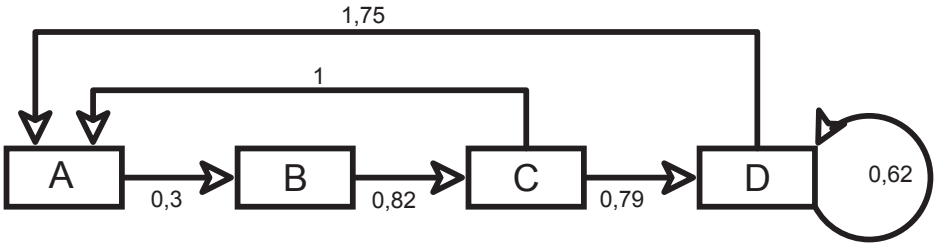
g) • Bestimmen Sie den Abwanderungsparameter x experimentell auf zwei Nachkommastellen genau.

• Beurteilen Sie, inwiefern das neue mathematische Modell für langfristige Prognosen zur Entwicklung der Kormoranpopulation geeignet ist. (10P)

Anlage zur Aufgabe „Kormorane“

A	B	C	D

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	 Die erste Spalte (von oben nach unten) stellt die Entwicklung der Kormorane der Altersklasse A dar: Die erste Null bedeutet, dass Kormorane in dieser Altersklasse keine Eier legen. 30% der Kormorane überleben und gehen in die nächste Altersklasse über. Die letzten beiden Nullen bedeuten, dass es keine Kormorane gibt, die eine bzw. zwei Altersklassen überspringen. Die letzte Spalte (von oben nach unten) stellt die Entwicklung der Kormorane der Altersklasse D dar: Die 1,75 ist die Bruterfolgsquote der Vögel der Altersklasse D. Jeder Altvogel „erzeugt“ also 1,75 neue Jungtiere; das heißt pro Paar gibt es 3 – 4 Jungtiere. Die folgenden beiden Nullen legen fest, dass kein Kormoran aus dieser Altersklasse wieder in die Altersklassen B und C übergeht. Der letzte Eintrag gibt den Anteil der Kormorane an, der überlebt und weiterhin in der Altersklasse D verbleibt.	10	5	
b)	$L \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3020,5 \\ 606,3 \\ 1292,32 \\ 1552,02 \end{pmatrix} \triangleq 6471$ Kormoranen $L^{10} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4445,98 \\ 1288,44 \\ 1026,20 \\ 2019,68 \end{pmatrix} \triangleq 8780$ Kormoranen *Geringfügige Abweichungen sind möglich und zu tolerieren, wenn vor der Addition auf ganzzahlige Werte gerundet wurde.*	10		

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	$L^{-1}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}5253,33\\1348,78\\867,51\\659,13\end{pmatrix}\triangleq 8129$ Kormoranen Die Startpopulation besteht aus 5797 Vögel. Das sind 2332 Vögel weniger als im Vorjahr. Die Behauptung des NABU stimmt also nicht in der exakten Zahl aber in der Tendenz.	10	5	
d)	Die Beträge der *rellen* Eigenwerte der Matrix L sind (2 reelle und 2 komplexe Eigenwerte): $\lvert\lambda_1\rvert\approx 1,03\wedge\lvert\lambda_2\rvert\approx 0,43$ Da der betragsmäßig größte Eigenwert größer als 1 ist, folgt daraus, dass die Population unbeschränkt wachsen wird. Die Population in 50 Jahren berechnet sich als: $L^{50}\cdot\vec{b}\approx\begin{pmatrix}12714\\3715\\2967\\5764\end{pmatrix}$ Sie wächst also auf 25160 Kormorane an. *Alternativ kann auf die Betrachtung der Eigenwerte verzichtet werden und eine Prognose mit Hilfe von geeigneten Populationen (z.B. $L^{10}\cdot\vec{b},L^{20}\cdot\vec{b},\ldots$) durchgeführt werden.* Der beschränkte Platz für Nester und ein endliches Nahrungsangebot lassen in der Realität kein unbeschränktes Wachstum zu. Das Modell ist also nur in dem Bereich sinnvoll zu nutzen, in dem die Kormoranpopulation die Platz- und Nahrungsgrenzen nicht sprengt.		15	5
e)	Da es keinen Eigenwert mit dem Betrag 1 gibt, existiert keine stabile Population unter den gegebenen Umständen. *Alternativ kann auch das Gleichungssystem $L\cdot\vec{x}=\vec{x}$ als Ansatz gewählt werden. Der Nachweis, dass es keine nichttriviale Lösung hat, gilt ebenfalls als korrekte Lösung.*		10	

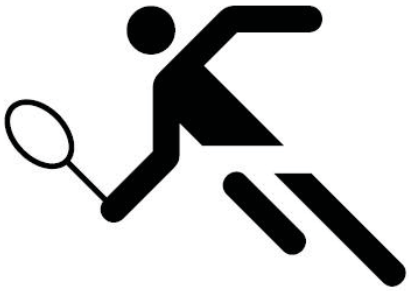
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Den ersten neuen Populationsvektor erhält man, indem man das Produkt $L \cdot \vec{b} = \vec{b}_1$ bildet und anschließend die erste Komponente 0 setzt. $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3020,5 \\ 606,3 \\ 1292,32 \\ 1552,02 \end{pmatrix}$ daraus ergibt sich (gerundet) $\vec{b}_{neu,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 606 \\ 1292 \\ 1552 \end{pmatrix} \triangleq 3450$ Kormoranen Die Populationsvektoren der folgenden Jahre ergeben sich dann jeweils als Produkt der modifizierten Populationsvektoren mit der Matrix L. $\vec{b}_2 = L \cdot \vec{b}_{neu,1} = \begin{pmatrix} 4008,36 \\ 0 \\ 496,92 \\ 1983,19 \end{pmatrix}$ d.h. $\vec{b}_{neu,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 497 \\ 1983 \end{pmatrix} \triangleq 2480$ Kormoranen; *Hinweise: Geringfügige Abweichungen in den Rechnungen durch fehlende bzw. andere Rundungen sind möglich und zu tolerieren.* Zu Beginn der Beobachtung besteht die Gesamtpopulation aus 5797 Vögeln. Man muss also herausfinden, wann die Gesamtpopulation mit den Startvektoren $\vec{b}_{neu,1}$ bzw. $\vec{b}_{neu,2}$ wieder größer als 5797 Vögel wird. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot L \cdot \vec{b}_{neu,1} \approx 6488$ Die Population hat sich also bereits nach einem Jahr wieder erholt. Auch in den Folgejahren sinkt die Population nicht wieder unter den Startwert von 5797 Vögeln. Für die zweite Population gilt: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot L \cdot \vec{b}_{neu,2} \approx 5589$ diese Anzahl sinkt in den kommenden Jahren sogar noch: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot L^{11} \cdot \vec{b}_{neu,2} \approx 5682$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot L^{12} \cdot \vec{b}_{neu,2} \approx 5837$ Wenn der Plan der Fischer 2 Jahre lang durchgeführt würde, bräuchte die Kormoranpopulation 12 Jahre um sich davon zu erholen. Da der Plan der Fischer nichts an dem grundsätzlichen Fortpflanzungs- und Überlebensraten ändert, ist das Wachstum der Kormorane weiterhin unbeschränkt.		10	10

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
g)	Durch Intervallschachtelung mit der Formel $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot L_x \cdot \vec{b} \approx 5797$ findet man für den Parameter x den Wert $x \approx 0{,}43$. *Hinweis: Andere Lösungswege sind möglich.* Auch dieses Modell ist für langfristige Prognosen nicht geeignet, weil von einer konstanten Abwanderung über den gesamten Prognosezeitraum ausgegangen wird. Zukünftige Entwicklungen wie eventuelle Zuwanderungen, größeres Platz- oder Nahrungsangebot (durch die Abwanderung verursacht) werden nicht berücksichtigt.		5	5
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

STOCHASTIK 1

III.1 Gewinnprognose

Benny, ein ehemaliger Tennisprofi, verdient sich sein Geld, indem er jede Woche einen Schaukampf durchführt. Im Laufe der Zeit hat er festgestellt, dass seine Gewinnwahrscheinlichkeit davon abhängt, wie der vorangegangene Kampf ausgegangen ist. Dies kann psychologische Gründe haben oder auch dadurch bedingt sein, dass er für längere Zeit in gleichbleibend guter bzw. schlechter Form ist.



Nach einem verlorenen Spiel verliert er das nächste Spiel mit der Wahrscheinlichkeit 0,8, während auf einen Sieg ein weiterer Sieg mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 folgt.

a) Skizzieren Sie den zu diesen Angaben gehörenden Übergangsgraphen. (5P)

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Benny das übernächste Spiel gewinnt,

- wenn er heute gewonnen hat.
- wenn er heute verloren hat. (*Zur Kontrolle:* 0,3) (10P)

Gehen Sie bei allen folgenden Aufgabenteilen von der Voraussetzung aus, dass Benny sein heutiges Spiel verloren hat.

c) Erstellen Sie ein Baumdiagramm für die nächsten drei Spiele und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Benny nach seiner heutigen Niederlage

- die nächsten drei Spiele gewinnt.
- das Spiel in drei Wochen gewinnt. (20P)

Nun soll die Verdienstsituation von Benny betrachtet werden: Seine Verträge sehen so aus, dass er für ein gewonnenes Spiel eine Prämie von 2000 Euro erhält, für ein verlorenes Spiel aber nur eine Prämie von 1000 Euro.

d) Berechnen Sie unter Berücksichtigung der bisher gemachten Annahmen den Erwartungswert für die Prämie

- in der nächsten Woche.
- in der übernächsten Woche. (10P)

In der Vergangenheit hat Benny manchmal nach einer Niederlage ein zusätzliches Aufbautraining absolviert, das ihn 300 Euro kostet. Als Folge davon steigert sich die Gewinnwahrscheinlichkeit für das folgende Spiel auf 0,5.

e) Zeigen Sie, dass sich der Erwartungswert für die Prämie genau um 300 Euro erhöht, und begründen Sie, dass es sich für Benny trotzdem finanziell lohnt, das Aufbautraining durchzuführen. (15P)

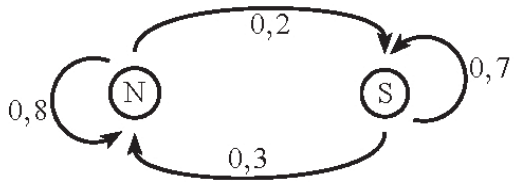
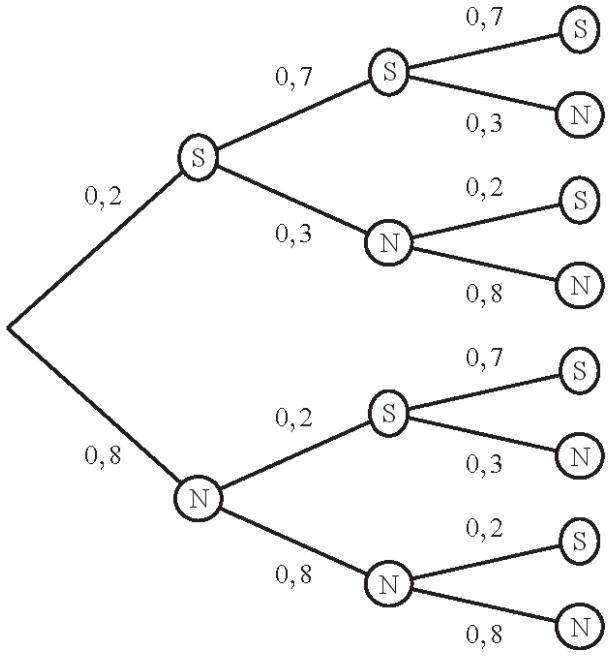
Benny hat, wie bereits erwähnt, sein heutiges Spiel verloren und will nun in der folgenden Woche das Aufbautraining durchführen. So will er es jetzt nach jeder Niederlage halten. Er macht sich aber Sorgen, dass es lange dauern könnte, bis er wieder eine höhere Prämie erhält, und dass er mehrere Wochen hintereinander das kosten- und zeitintensive Aufbautraining durchführen muss.

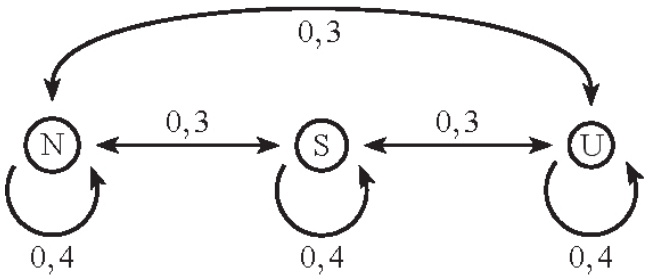
f) Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Spiele und damit die Anzahl der Wochen, in denen er das Aufbautraining durchführen muss, bis Benny wieder ein Spiel gewinnt. (15P)

Wäre Benny nicht ehemaliger Tennisprofi, sondern Mitspieler bei der All-Stars Fußballmannschaft, würden die Überlegungen etwas anders aussehen, da es dann auch ein Unentschieden geben kann. Es soll angenommen werden, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel in der nächsten Woche genauso ausgeht wie das Spiel in dieser Woche, 0,4 beträgt und alle anderen Übergangswahrscheinlichkeiten untereinander gleich groß sind.

g)
- Skizzieren Sie den zu diesen Angaben gehörenden Übergangsgraphen.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Mannschaft in den nächsten drei Wochen mindestens zwei Siege erzielt, wenn sie das heutige Spiel verloren hat. (25P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	 Dabei steht N für eine Niederlage von Benny und S für einen Sieg.	5		
b)	Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Benny das übernächste Spiel gewinnt, ist jeweils $P(\text{SS}) + P(\text{NS})$ und damit … • … $0{,}7^2 + 0{,}3\cdot 0{,}2 = 0{,}55$, falls er heute gewonnen hat. • … $0{,}2\cdot 0{,}7 + 0{,}8\cdot 0{,}2 = 0{,}3$, falls er heute verloren hat.	10		
c)	Darstellung im Baumdiagramm:  • Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Benny die nächsten drei Spiele gewinnt, ist $P(\text{SSS}) = 0{,}2\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7 = 0{,}098$. • Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Benny das Spiel in drei Wochen gewinnt, ist $P(\text{SSS}) + P(\text{SNS}) + P(\text{NSS}) + P(\text{NNS})$ $= 0{,}2\cdot 0{,}7\cdot 0{,}7 + 0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2 + 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2 + 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7 = 0{,}35$.	5	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	• Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind im Aufgabentext gegeben. Der Erwartungswert für die Prämie in der nächsten Woche ist $0{,}2 \cdot 2000\ € + 0{,}8 \cdot 1000\ € = 1200\ €$. • Für die übernächste Woche ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten aus Teil b). Also ist der Erwartungswert für die Prämie der übernächsten Woche $0{,}3 \cdot 2000\ € + 0{,}7 \cdot 1000\ € = 1300\ €$.	10		
e)	Da die Siegwahrscheinlichkeit auf 0,5 steigt, ist der Erwartungswert für die Prämie $0{,}5 \cdot 2000\ € + 0{,}5 \cdot 1000\ € = 1500\ €$ und damit um 300 Euro erhöht. Benny kann nur erwarten, seine Ausgaben für das Aufbautraining zusätzlich wieder zu verdienen. Trotzdem lohnt sich das Training, denn nach einem Sieg verbessern sich seine Gewinnchancen, und die in den folgenden Wochen zu erwartenden Prämieneinnahmen sind höher.		15	
f)	Es handelt sich um das Warten auf den ersten Erfolg bei einer Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg von 0,5. Damit ist der Erwartungswert der Kehrwert von 0,5, also 2. *Argumentation über den Vergleich mit dem Warten auf die erste 6 beim Mensch ärgere dich nicht oder über eine geometrische Verteilung* Benny erwartet, in 2 Wochen wieder ein Spiel zu gewinnen.		15	
g)	• Übergangsgraph:  Dabei wird Unentschieden mit U abgekürzt. • Die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Siege in den nächsten 3 Wochen ist $P(\text{SSS}) + P(\text{SSU}) + P(\text{SSN}) + P(\text{SUS}) + P(\text{SNS}) + P(\text{USS}) + P(\text{NSS})$ $= 0{,}3 \cdot 0{,}4^2 + [0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}3] \cdot 2 + [0{,}3^3] \cdot 2 + 0{,}3^2 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}258$.		5	20
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

STOCHASTIK 2

III.2 Ein-Euro-Münzen

In der Cafeteria einer Schule werden während der Unterrichtszeit im Wesentlichen wöchentlich die Einnahmen gezählt und bei der Bank eingezahlt; dabei wird aus statistischen Gründen auch ermittelt, welche Verteilung die Ein-Euro-Münzen bezüglich der münzausgebenden Länder aufweisen.

Seit dem Beginn dieser Statistik im September 2009 bis zum Juli 2011 ergab sich Folgendes:
Insgesamt wurden 24 100 Ein-Euro-Münzen gezählt, davon kamen 15 705 aus Deutschland, 2 082 aus Spanien, 2 032 aus Italien und 60 aus Luxemburg. Die restlichen Münzen kamen aus den anderen dreizehn Euro-Ländern.

Verwenden Sie als Indizes zur Unterscheidung der Länder die Landeskennzeichen: D für Deutschland, E für Spanien, I für Italien und L für Luxemburg.

a) Zunächst sollen nur deutsche und nichtdeutsche Ein-Euro-Münzen unterschieden werden. Begründen Sie, dass man die Auszählung der nächsten Einnahme in guter Näherung als Bernoulli-Kette modellieren kann. (5P)

b) Geben Sie die relative Häufigkeit des Auftretens deutscher Ein-Euro-Münzen an. (5P)

Verwenden Sie diesen Wert ebenso wie die anderen relativen Häufigkeiten – auf zwei Nachkommastellen gerundet – für die nächsten Aufgabenteile als geschätzte Wahrscheinlichkeiten; für Luxemburg arbeiten Sie bei Teil e) bitte mit dem Wert $p_L = 0{,}002$.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

- Unter fünf Ein-Euro-Münzen befinden sich genau drei deutsche.
- Unter zehn Ein-Euro-Münzen befindet sich keine italienische Münze.
- Beim Zählen von vier einzelnen Ein-Euro-Münzen kommen nach einer deutschen drei nichtdeutsche Münzen. (15P)

d) In der letzten Woche sind 256 Ein-Euro-Münzen gezählt worden.

- Berechnen Sie die Erwartungswerte für die Anzahlen der italienischen und der spanischen Münzen.
- Eine der ausländischen Münzarten kam in dem Haufen von 256 Münzen 25-mal vor. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 256 Ein-Euro-Münzen genau 25 spanische Münzen sind, werde mit $P_E(25)$ bezeichnet, entsprechend $P_I(25)$ für die italienischen Münzen. Entscheiden Sie – ohne zu rechnen! – begründet, welche dieser beiden Wahrscheinlichkeiten größer ist.
- Als Q_{25} soll der Quotient $Q_{25} = \frac{P_E(25)}{P_I(25)}$ bezeichnet werden. Bestimmen Sie Q_{25}.

  Hinweis: *Wenn Sie Q_{25} aufschreiben, erkennen Sie, dass sich wesentliche unangenehme Terme wegkürzen.*
- Beschreiben Sie, was dann Q_{20} bedeutet, und entscheiden Sie, ob Q_{20} größer oder kleiner als Q_{25} ist. (25P)

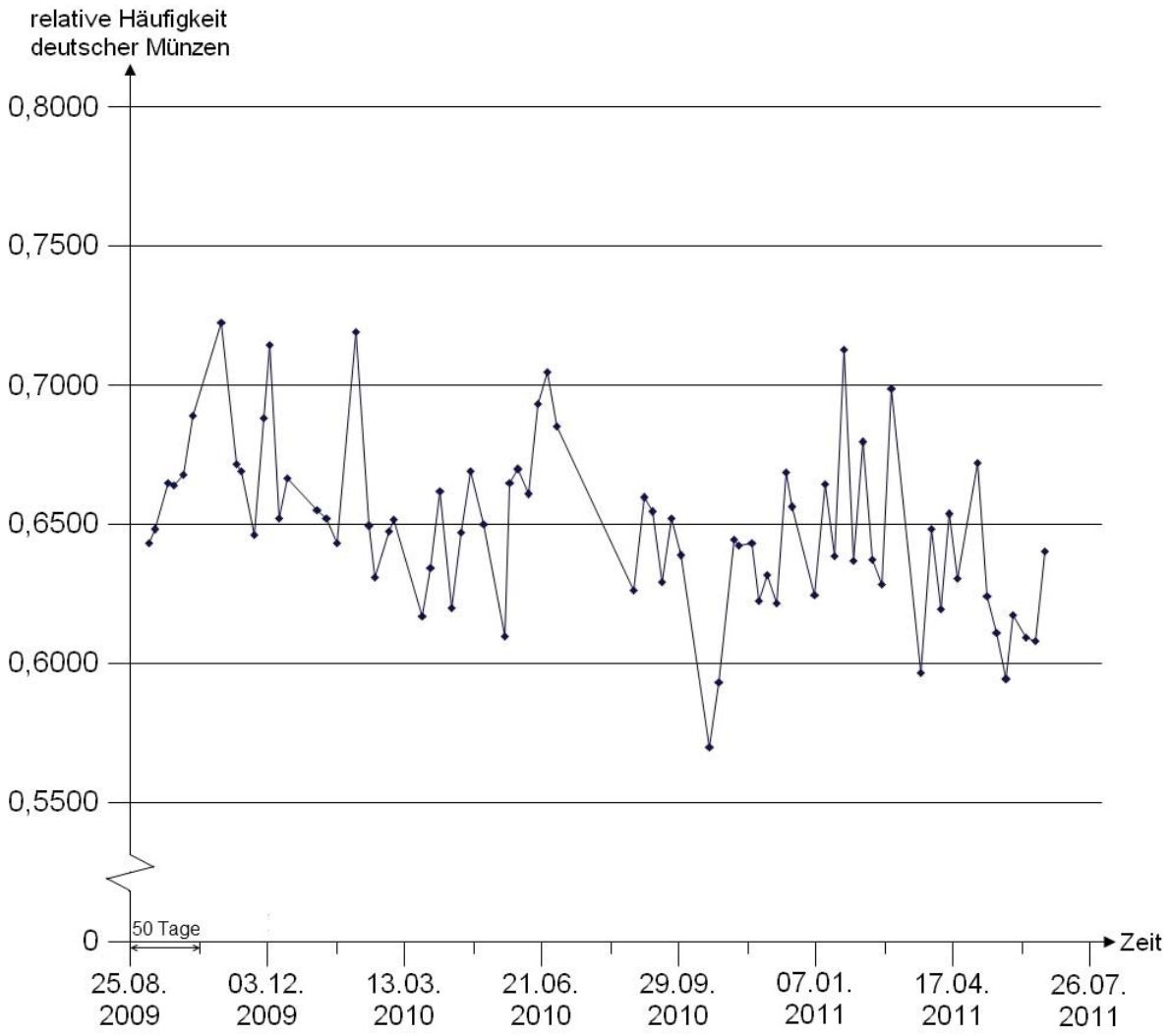
e) Im Monat April wurden 1180 Ein-Euro-Münzen eingenommen. Darunter befanden sich zwei luxemburgische Münzen.
Sie wissen, dass man die Poisson-Näherung verwenden kann, wenn bei einer großen Anzahl von Durchführungen wenige Erfolge zu erwarten sind. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 1180 Ein-Euro-Münzen höchstens zwei luxemburgische Münzen gefunden werden, sowohl mit Hilfe der Binomialverteilung als auch mit Hilfe der Poisson-Näherung und vergleichen Sie die Resultate. (25P)

f) Das Diagramm in der Anlage zeigt die relativen Häufigkeiten der deutschen Ein-Euro-Münzen für jede der Einzahlungen im Beobachtungszeitraum; jede der Einzahlungen enthielt mindestens 250 Ein-Euro-Münzen.

Nehmen Sie Stellung zu den Daten, die in diesem Diagramm dargestellt werden.

- Geben Sie dabei insbesondere eine mögliche Ursache für die verschiedenen zeitlichen Abstände der Datenpunkte an,
- ermitteln Sie einen Schätzwert für die Standardabweichung, bezogen auf eine einzelne Ein-Euro-Münze,
- interpretieren Sie die Tatsache, dass – ungeachtet der Schwankungen von Woche zu Woche – der Anteil der deutschen Münzen tendenziell abnimmt, und
- begründen Sie, welche Aussagen über den zukünftigen Anteil der deutschen Münzen daraus ableitbar sind. (25P)

Anlage zur Aufgabe „Ein-Euro-Münzen“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Der Anteil der deutschen Ein-Euro-Münzen ist in guter Näherung konstant, und das Ergebnis des „Ziehens“ der aktuellen Münze hängt weder von einer vorigen noch von einer folgenden Münze ab. Folglich ist die Modellierung des Vorgangs als ein Bernoulli-Experiment zulässig.		5	
b)	$h_D = \frac{15705}{24100} \approx 0{,}65 =: p_D$	5		
c)	• $P_{c1} = \binom{5}{3} \cdot p_D{}^3 \cdot (1-p_D)^2 \approx 0{,}34$ • $P_{c2} = (1-p_I)^{10} = (1-0{,}08)^{10} \approx 0{,}43$ • $P_{c3} = p_D \cdot (1-p_D)^3 \approx 0{,}03$	15		
d)	• $E_E = 256 \cdot 0{,}09 \approx 23$; $E_I = 256 \cdot 0{,}08 \approx 20{,}5$ • 25 liegt näher an der bei $n = 256$ erwarteten Münzen-Anzahl für Spanien als an der erwarteten Anzahl für Italien bei annähernd gleicher Standardabweichung. Deshalb muss $P_E(25)$ größer sein als $P_I(25)$. • Gefragt ist nach dem Quotienten $Q_{25} = \frac{P_E(25)}{P_I(25)}$. Beim Einsetzen kürzen sich die Binomialkoeffizienten weg, und man erhält: $Q_{25} = \left(\frac{p_E}{p_I}\right)^{25} \cdot \left(\frac{1-p_E}{1-p_I}\right)^{231} \approx 1{,}5$ *(Also ein Wert größer als 1, wie erwartet)* • Der entsprechende Quotient Q_{20} bezeichnet das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten dafür, dass 20 von 256 Münzen spanisch bzw. italienisch sind. Bei ungefähr gleicher Standardabweichung für die beiden Münzarten ist das Auftreten von 20 italienischen Münzen wahrscheinlicher als das von 20 spanischen, da E_I näher an 20 liegt als E_E. Also muss Q_{20} kleiner als 1 sein und damit kleiner als Q_{25}. *Oder:* $Q_{20} = \left(\frac{p_E}{p_I}\right)^{20} \cdot \left(\frac{1-p_E}{1-p_I}\right)^{236} \approx 0{,}8 < Q_{25}$	5	20	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	Zu bestimmen ist hier die Summe der Wahrscheinlichkeiten für $k = 0$, $k = 1$ und $k = 2$ mit $p_L = 0{,}002$: $P_{\text{bin}} = \left(B(1180, p_L, 0) + B(1180, p_L, 1) + B(1180, p_L, 2)\right) \approx 0{,}58 \approx 0{,}6$ $P_{\text{Poisson}} = \left(1 + \frac{1180 \cdot p_L}{1!} + \frac{(1180 \cdot p_L)^2}{2!}\right) \cdot e^{-1180 \cdot p_L} \approx 0{,}58 \approx 0{,}6$ *Es ist nicht sinnvoll, das Ergebnis mit höherer Genauigkeit anzugeben, da der Wert für p_L aus der Datenlage nicht genauer geschätzt werden kann.* Die berechneten Ergebnisse sind ununterscheidbar, insbesondere ist die Poisson-Näherung hier hervorragend anzuwenden.		25	
f)	*Dieser sehr offen gehaltene Aufgabenteil lässt viele sinnvolle Antworten zu.* • Die verschiedenen zeitlichen Abstände der Datenpunkte ergeben sich vor allem daraus, dass in den Ferien die Cafeteria nicht geöffnet ist. • Laut Angaben sind nie weniger als 250 Ein-Euro-Münzen eingezahlt worden; wenn wir hier von einer mittleren Einzahlung von 300 Münzen insgesamt ausgehen und einen Anteil der deutschen Münzen von 65 % annehmen, dann ist die Standardabweichung (für das gesamte Zählergebnis) $\sigma = \sqrt{300 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}35} \approx 8{,}3$ und die hier interessierende (auf eine einzelne Münze bezogene) „relative“ Standardabweichung $\sigma_{rel} = \frac{\sigma}{300} \approx 0{,}028$. *Bemerkung: Der Streifen mit einer Standardabweichung Breite um die Daten ist also praktisch so breit wie der waagerechte Linienabstand im Diagramm.* • Die Ein-Euro-Münzen aus den verschiedenen Ausgabeländern werden sich auf Dauer insbesondere durch Auslandsreisen immer stärker vermischen, wie man hier an dem starken Rückgang nach den Sommerferien 2010 erkennt. Dadurch nimmt der Anteil der deutschen Münzen tendenziell ab. • Die Frage ist hier, wie man diese Abnahme modelliert. Die mathematisch einfachste Idee wäre, in die Daten eine Gerade zu legen und den weiteren Verlauf aus dieser Geraden vorauszusagen. Wie weit eine solche lineare Prognose sinnvoll bleibt, ist allerdings fraglich – schließlich kann die relative Häufigkeit deutscher Münzen praktisch nicht unter den Anteil der deutschen Münzen an allen Ein-Euro-Münzen sinken (der bei etwa 20 % liegt). Deswegen liegt es nahe, hier über eine $e^{-\lambda \cdot t}$-Funktion nachzudenken, deren Zeitkonstante λ dann allerdings so groß ist, dass der Verlauf der Funktion im betrachteten Zeitintervall von einem linearen Verlauf praktisch nicht zu unterscheiden ist. *(Ein sinnvolles Modell für den zugehörigen Vorgang ist das der Diffusion, bei der der Vorgang tatsächlich durch eine $e^{-\lambda \cdot t}$-Funktion beschrieben wird.)*	5		20
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20