Hilfsmittelfreier Prüfungsteil 1

I.1

Analysis

a) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 9 - x^2$.

- Geben Sie die Nullstellen der Funktion an und skizzieren Sie den Graphen. (2P)
- Berechnen Sie $\int_0^3 f(x)\,dx$. (3P)

b) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.

- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente, die an der Stelle $x = 1$ den Graphen der Funktion f berührt. (3P)
- Zeigen Sie, dass $x = 2$ keine Wendestelle der Funktion f ist. (2P)

Analytische Geometrie und lineare Algebra

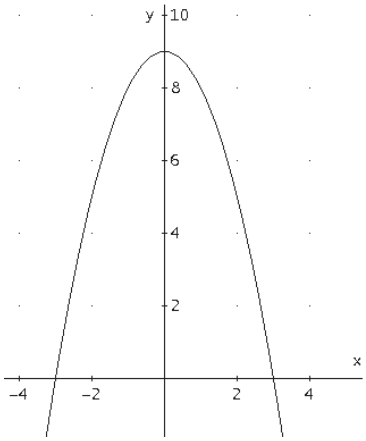
c) Gegeben sind die vier Punkte $A(0 \mid 3 \mid 4)$, $B(2 \mid 3 \mid 8)$, $C(6 \mid 9 \mid 4)$ und $P(1 \mid 0 \mid -1)$.

- Bestätigen Sie, dass die Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden liegen. (2P)
- Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_1 durch die Punkte A, B und C und eine Gleichung der dazu parallelen Ebene E_2 durch den Punkt P. (3P)

d) Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Berechnen Sie $A \cdot \vec{v}$. (2P)
- Bestimmen Sie A^2. (3P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Die Nullstellen sind $x_1 = -3$ und $x_2 = 3$.  	2		
	• $\int_0^3 \left(9 - x^2\right) dx = \left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 27 - 9 - (0) = 18$	3		
b)	• Funktionswert an der Stelle $x = 1$: $f(1) = 1 - 8 + 24 = 17$ Steigung an der Stelle $x = 1$: $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 48x;\qquad f'(1) = 4 - 24 + 48 = 28$ Damit ergibt sich die Tangentengleichung: $t(x) = 28(x-1) + 17 = 28x - 11$		3	
	• Es gilt $f''(x) = 12x^2 - 48x + 48 = 12 \cdot (x-2)^2$, damit ist $x = 2$ eine Nullstelle der zweiten Ableitung, es gibt aber in der Umgebung von $x = 2$ keinen Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung und damit keinen Wendepunkt.			2

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	• Aufstellen der Gleichung einer Geraden durch die Punkte A und B und Überprüfung, dass der Punkt C nicht auf dieser Geraden liegt. $AB:\ \vec{x}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2-0\\3-3\\8-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}6\\9\\4\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ Wegen des Widerspruchs in der zweiten Koordinate (9 = 3) ist die Gleichung nicht lösbar, der Punkt C kann also nicht auf der Geraden AB liegen. *Anmerkung: Es sind auch andere Lösungswege und andere Notationen möglich.*	2		
	• E_1 wird ermittelt mithilfe eines Ortsvektors und zweier Spannvektoren. Es ergibt sich: $E_1:\vec{x}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}+\sigma\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2-0\\3-3\\8-4\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}6-0\\9-3\\4-4\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}$ $E_2:\vec{x}=\overrightarrow{OP}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}+\sigma\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}$ *Es sind andere Lösungswege und Darstellungen möglich.*		3	
d)	• $A\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$	2		
	• $A^2=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&3\\0&1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3&6\\0&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$		3	
	Insgesamt 20 BWE	9	9	2

Hilfsmittelfreier Prüfungsteil 2

I.2

Analysis

a) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 9 - x^2$.

- Geben Sie die Nullstellen der Funktion an und skizzieren Sie den Graphen. (2P)
- Berechnen Sie $\int_0^3 f(x)\,dx$. (3P)

b) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.

- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente, die an der Stelle $x = 1$ den Graphen der Funktion f berührt. (3P)
- Zeigen Sie, dass $x = 2$ keine Wendestelle der Funktion f ist. (2P)

Stochastik

c) Ein Tennisspiel ist entschieden und endet, wenn einer der beiden Spieler drei Sätze gewonnen hat. Ein Spieler kann einen Satz nur gewinnen oder verlieren, eine dritte Möglichkeit gibt es nicht.

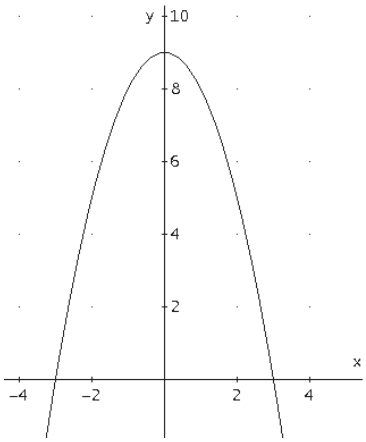
Der Spieler Anton gewinnt einen Satz mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ gegen Bert.

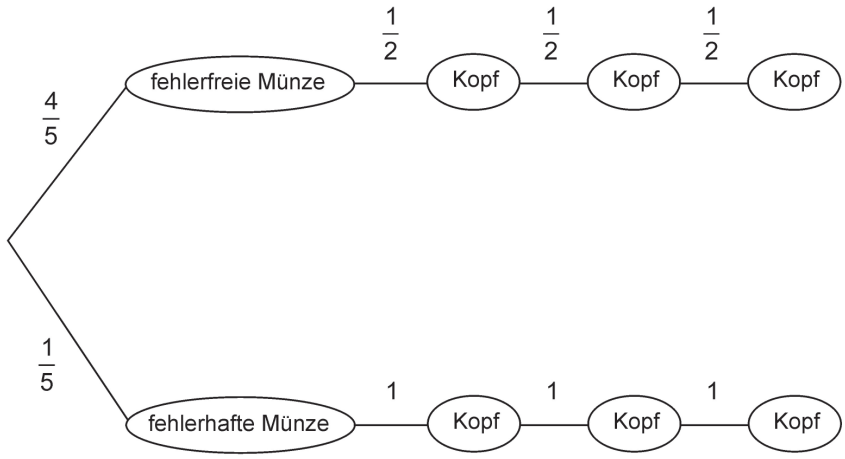
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Anton das Spiel nach genau drei Sätzen gewonnen hat und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Anton das Spiel nach genau vier Sätzen gewonnen hat. (3P)
- Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der erforderlichen Sätze bis zum Sieg eines der beiden Spieler an.
  Begründen Sie, dass gilt $3 \leq X \leq 5$. (2P)

d) In einem Beutel befinden sich fünf Münzen; eine davon ist fehlerhaft, weil auf beiden Seiten *Kopf* eingeprägt ist.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim dreimaligen zufälligen Ziehen ohne Zurücklegen die fehlerhafte Münze nicht gezogen wird. (2P)
- Es wird eine Münze zufällig gezogen. Diese Münze wird dreimal geworfen.
  Erstellen Sie ein (ggf. vereinfachtes) Baumdiagramm und bestimmen Sie damit die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis "Es liegt dreimal 'Kopf' oben". (3P)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Die Nullstellen sind $x_1 = -3$ und $x_2 = 3$. 	2		
	• $\int_0^3 \left(9 - x^2\right) dx = \left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 27 - 9 - (0) = 18$	3		
b)	• Funktionswert an der Stelle $x = 1$: $f(1) = 1 - 8 + 24 = 17$ Steigung an der Stelle $x = 1$: $f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 48x$; $f'(1) = 4 - 24 + 48 = 28$ Damit ergibt sich die Tangentengleichung: $t(x) = 28(x - 1) + 17 = 28x - 11$		3	
	• Es gilt $f''(x) = 12x^2 - 48x + 48 = 12 \cdot (x - 2)^2$, damit ist $x = 2$ eine Nullstelle der zweiten Ableitung, es gibt aber in der Umgebung von $x = 2$ keinen Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung und damit keinen Wendepunkt.			2

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	• $P(\text{Anton gewinnt in genau 3 Sätzen}) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ $P(\text{Anton gewinnt in genau 4 Sätzen}) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$	1	2	
	• Es müssen *mindestens* drei Sätze gespielt werden, damit ein Spieler drei Sätze gewinnen kann. Nach vier Sätzen hat entweder jemand das Spiel bereits gewonnen oder jeder hat genau zwei Sätze gewonnen. Im Falle des Gleichstandes ist ein fünfter Satz nötig, der die Entscheidung zwingend herbeiführt. Es sind also *höchstens* fünf Sätze notwendig.		2	
d)	• $P(\text{Die fehlerhafte Münze wird dreimal nicht gezogen}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5} = 0{,}4$	2		
	•  *Es sind auch andere Baumdiagramme möglich.* $P(\text{Es liegt dreimal "Kopf" oben}) = \frac{1}{5} \cdot 1^3 + \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$	1	2	
	Insgesamt 20 BWE	9	9	2

Analysis 1

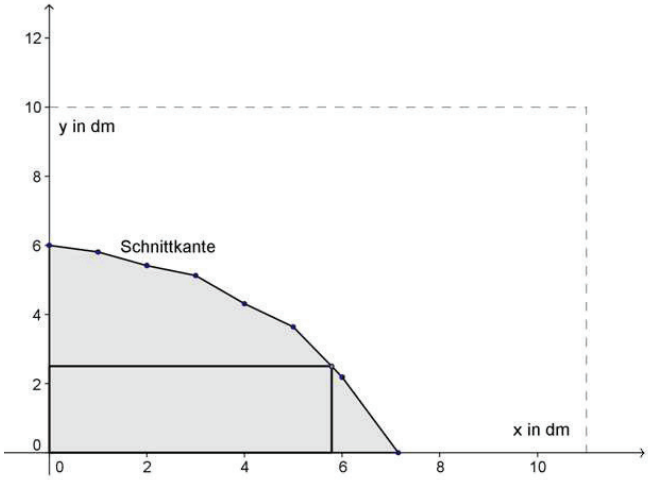
II.1 Metallbearbeitung

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

Ein Betrieb schneidet Metallplatten zu, die vorher mit aufwändigen Verfahren möglichst exakt glatt geschliffen wurden. Er ist ein Spezialbetrieb für besonders präzise Zuschnitte mit Laserverfahren.

Eine ganze Serie von Metallplatten des Formats 11 dm Breite und 10 dm Höhe (siehe Abbildung) ist leider bei einem fehlerhaften Produktionsprozess zerstört worden. Jede dieser Platten ist längs der gleichen Schnittkante zerschnitten worden.

Um die Verluste möglichst gering zu halten, sollen die Entwickler der Steuersoftware für den Laser ermitteln, wie die Reststücke der Metallplatten noch genutzt werden können, indem möglichst große Rechtecke mit achsenparallelen Seiten ausgeschnitten werden.



I. Inneres Reststück der Platte

Die Softwareentwickler legen ein Koordinatensystem derart, dass dieses Reststück von der x-Achse, der y-Achse und der Schnittkante eingeschlossen wird (siehe nebenstehende Abbildung).

Sie messen folgende Punkte der Schnittkante aus:

x in dm	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,15
y in dm	6,0	5,81	5,42	5,13	4,31	3,64	2,19	0,0

Um im Folgenden übersichtlich rechnen zu können, soll die Schnittkante durch eine einzige Näherungsfunktion beschrieben werden und nicht durch sieben lineare Funktionen für die einzelnen Abschnitte. Die Fachleute beurteilen eine Näherungsfunktion als hinreichend genau, wenn die Abweichungen der Funktionswerte zu den entsprechenden Tabellenwerten den Wert 0,15 dm nicht überschreiten.

a)
- Berechnen Sie eine ganzrationale Regressionsfunktion f vierten Grades für die Messwerte der Tabelle. Geben Sie die Koeffizienten mit jeweils einer Nachkommastelle mehr an, als sie im Kontrollergebnis dargestellt sind.
- Bestätigen Sie, dass der Graph dieser Funktion eine hinreichend genaue Näherung für die Schnittkante darstellt. (9P)

  Kontrollergebnis: $f_{Kontrolle}(x) = -0{,}001629x^4 + 0{,}006348x^3 - 0{,}05661x^2 - 0{,}16499x + 6{,}004$

b) • Bestimmen Sie eine Flächeninhaltsfunktion $A_I : x \to A_I(x)$, die der Rechteckbreite x den Flächeninhalt des entstehenden einbeschriebenen Rechtecks zuordnet.

• Ermitteln Sie, welche Grenzen für den Definitionsbereich der Funktion A_I in diesem Sachkontext sinnvoll sind. Begründen Sie Ihre Angaben.

Hinweis: Flächeninhalte können in diesem Zusammenhang auch den Wert 0 haben. (8P)

Hinweis: Falls Sie in Aufgabenteil b) keine Lösung für die Funktion A_I gefunden haben, arbeiten Sie weiter mit $A_{I-Hilfe} : x \to -\frac{1}{625}x^5 + \frac{4}{625}x^4 - \frac{1}{17}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + 6x$ (dies ist nicht die korrekte Funktion).

c) • Begründen Sie, dass die Funktion A_I auf ihrem Definitionsbereich kein Randmaximum hat.

• Berechnen Sie anschließend das lokale Maximum von A_I und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext. (10P)

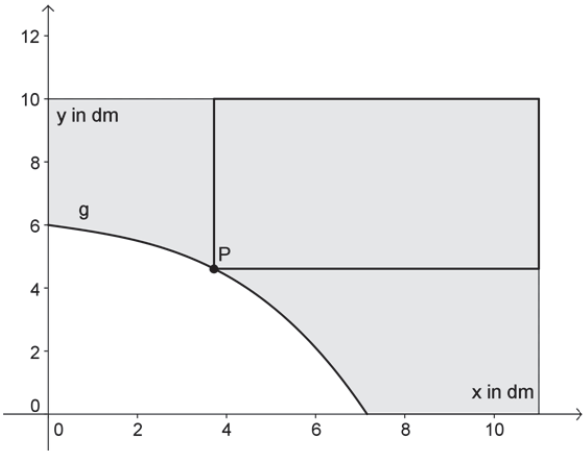
Für den Verkauf dieser inneren Reststücke werden im Betrieb zwei Ansätze diskutiert: Entweder könnte das größtmögliche präzise zugeschnittene Rechteck zum Normalpreis von 19 € pro dm² verkauft werden, oder das gesamte innere Reststück könnte als Ware zweiter Wahl für den halben Normalpreis pro dm² abgegeben werden.

d) Ermitteln Sie die jeweiligen Einnahmen und entscheiden Sie, welche Variante für den Betrieb günstiger ist. (11P)

Hinweis: Falls Sie den Flächeninhalt der größtmöglichen Rechteckplatte nicht ermitteln konnten, verwenden Sie den Wert 18,3 dm² (dies ist jedoch nicht die Lösung für c)).

II. Äußeres Reststück der Platte

Auch aus dem äußeren Reststück kann noch ein möglichst großes Rechteck mit achsenparallelen Seiten gewonnen werden (siehe nebenstehende Abbildung).



Die Nutzungsmöglichkeit dieses Reststücks soll nur ungefähr abgeschätzt werden. Verwenden Sie daher nicht mehr die Regressionsfunktion *f*, sondern als grobe Modellierung für die Schnittkante den Graphen der Funktion *g* mit

$g : x \to -\frac{1}{80}x^3 - \frac{1}{5}x + 6$ mit $D_g = [0\,;\,7{,}15]$

Die Flächeninhaltsfunktion A_{II} soll dem *x*-Wert eines Punktes *P* auf dem Graphen von *g* den Flächeninhalt des entstehenden Rechtecks zuordnen.

e) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion A_{II}.

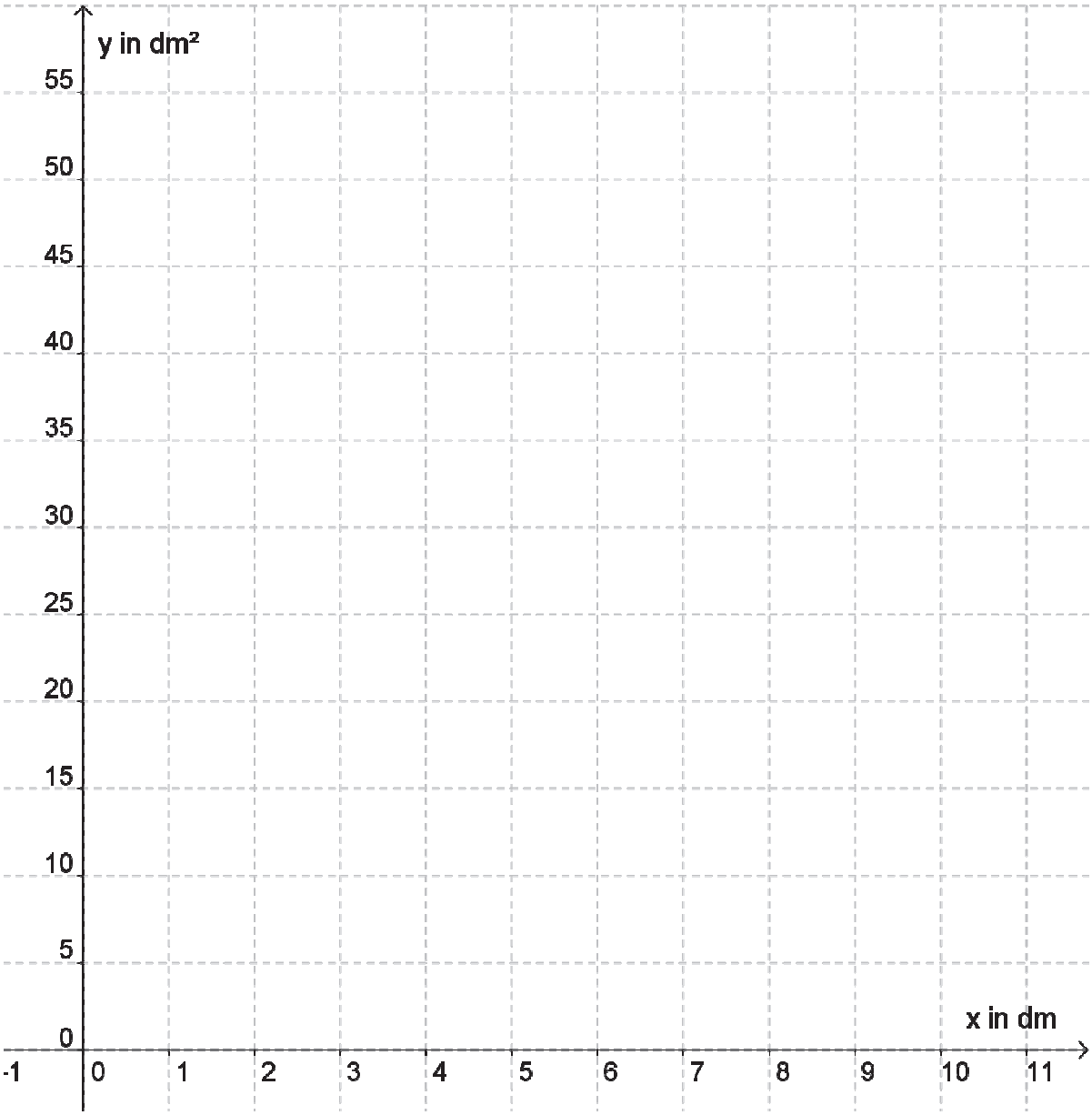
Hinweis: Sollten Sie Aufgabe e) nicht lösen können, arbeiten Sie in Aufgabe f) mit

$A_{II}(x) = \frac{1}{80}\left(-x^4 + 11x^3 - 16x^2 - 144x + 3520\right)$ *mit* $D_{A_{II}} = [0\,;\,7{,}15]$ (5P)

f) • Zeichnen Sie den Graphen von A_{II} in das Koordinatensystem in der Anlage.

• Ermitteln Sie den Flächeninhalt des größtmöglichen Rechtecks mithilfe Ihrer Zeichnung. (7P)

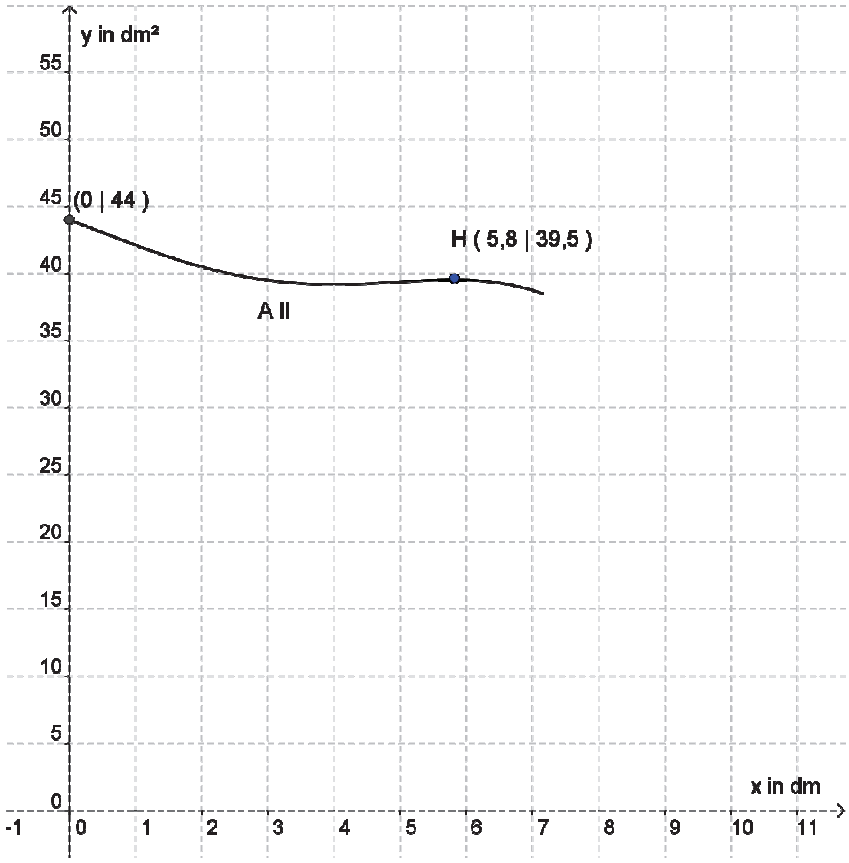
Anlage zur Aufgabe „Metallverarbeitung“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Die Regression liefert *f* mit $f(x) = -0{,}0016296x^4 + 0{,}0063489x^3 - 0{,}056617x^2 - 0{,}164997x + 6{,}0046$. *Achtung: Es wird nur <u>eine</u> Nachkommastelle mehr als im Kontrollergebnis gefordert.* • Der höchste Abweichungsbetrag zum Tabellenwert liegt für die angegebene Funktion bei $x = 4$ mit 0,118 unterhalb des geforderten Wertes von 0,15. *Die Kontrollfunktion liefert ebenfalls diese Ergebnisse.*	6	3	
b)	• Der gesuchte Inhalt der Rechteckfläche ist A_I mit $A_I(x) = x \cdot f(x)$. Für die oben angegebene Regressionsfunktion *f* ergibt sich: $A_I(x) = -0{,}00162956x^5 + 0{,}00634892x^4 - 0{,}0566171x^3 - 0{,}164997x^2 + 6{,}0046x$ • Definitionsbereich: Der *x*-Wert muss größer oder gleich Null sein, da dort erst die Platte beginnt, und kleiner oder gleich der positiven Nullstelle von *f* sein. Aus $f(x) = 0$ ergibt sich $x \approx 7{,}15$. Damit gilt näherungsweise $D = [0;\ 7{,}15]$.		8	
c)	• Linker Rand: $x = 0$, dann ist die Rechteckbreite gleich null, also $A_I(0) = 0$. Rechter Rand: $x = 7{,}15$, dann ist die Rechteckhöhe gleich null, also $A_I(7{,}15) = 0$. Im Inneren des Definitionsbereiches gibt es jedoch Funktionswerte größer Null, wie man schon aus der Zeichnung entnehmen kann. • Berechnung des lokalen Hochpunktes von A_I Die Nullstellen der ersten Ableitung ergeben sich aus $A_I'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4{,}516... \vee x = -4{,}195...$ Im Definitionsbereich liegt nur die positive Lösung. Es gilt: $A_I''(4{,}516...) = -3{,}312... < 0$, also liegt ein lokaler Hochpunkt vor. $A_I(4{,}516...) = 18{,}117...$ ist das lokale Maximum. Das flächenmaximale Rechteck, das ausgeschnitten werden kann, hat also einen Flächeninhalt von rund 18,12 dm². *(Für die Funktion $A_{I-Hilfe}$ ergibt sich ein Flächeninhalt von rund 17,94 dm².)* *Bei anderer Rechengenauigkeit und in Abhängigkeit von der verwendeten Soft- und Hardware kann es geringe Abweichungen von diesen Ergebnissen geben.*	6	4	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
d)	Mithilfe der Integralrechnung erhält man eine Näherung für den Flächeninhalt des inneren Reststücks: $\int_0^{7,15} f(x)dx \approx 29,875...$ Das Reststück hat also einen Flächeninhalt von rund 29,88 dm². *Der Flächeninhalt muss nicht explizit angegeben werden.* *Über die Hilfslösung ergeben sich geringe Abweichungen.* *Es sind Lösungswege denkbar und als richtig zu bewerten, die ohne Integration den Flächeninhalt der gegebenen vieleckigen Platte so genau bestimmen, dass eine eindeutige Entscheidung möglich ist.* Verkaufspreisabschätzung: (1) größtmögliches Rechteck: $18{,}12\text{dm}^2 \cdot 19€ / \text{dm}^2 = 344{,}28€$ (2) gesamtes inneres Reststück: $29{,}88\text{dm}^2 \cdot 0{,}5 \cdot 19€ / \text{dm}^2 = 283{,}86€$. Es ist also günstiger, das größtmögliche Rechteck zu verkaufen.		7	4
e)	Die Breite des Rechtecks ist durch den Ausdruck $11-x$ gegeben, die Höhe durch den Ausdruck $10-g(x)$. Durch Multiplikation der Ausdrücke ergibt sich: $A_{II}(x) = (11-x)\cdot(10-g(x))$. *Diese Darstellung ist bereits als vollständig richtig zu bewerten, Ausmultiplikation und Zusammenfassung wird nicht erwartet.*			5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	• Graphische Darstellung:  Der größtmögliche Flächeninhalt liegt also nicht beim lokalen Maximum, sondern er wird bei einem Randmaximum erreicht und hat einen Wert von ca. 44 dm². *Die Zeichnung soll so genau angefertigt werden, dass der innere Hochpunkt als solcher deutlich wird und er am richtigen Ort im Koordinatensystem eingezeichnet ist. Außerdem soll das Randmaximum bei etwa 44 dm² deutlich zu erkennen sein. Ein Eintragen der Koordinaten in die Zeichnung ist nicht notwendig. Der Definitionsbereich muss bei der Zeichnung beachtet werden.*		4	3
	Insgesamt 50 BWE	12	26	12

Analysis 2

II.2 Leistungsdiagnose

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

Im Ausdauersport wird zur Untersuchung der Leistungsfähigkeit und zur Bestimmung der optimalen Trainingsintensität häufig ein Stufentest durchgeführt. Der Sportler muss auf einem Ergometer (Heimtrainer) z. B. 3 Minuten lang mit einer Leistung von 100 Watt fahren, anschließend werden der Puls und die Laktatkonzentration im Blut gemessen, dann wird die Leistung um z. B. 40 Watt erhöht und wieder wird 3 Minuten lang belastet. Dies wird solange durchgeführt, bis die Belastungsgrenze des Sportlers erreicht ist.

Laktat ist ein Salz der Milchsäure, das bei der Energieumsetzung im Muskel freigesetzt wird.

Bei steigender Belastung sinkt die Laktatkonzentration zunächst und steigt später deutlich an.

Die Konzentration des Laktats im Blut wird in Millimol pro Liter angegeben. Die unten stehende Tabelle zeigt die Daten eines trainierten Ausdauersportlers.

Im ersten Schritt soll eine lineare Funktion bestimmt werden, die den Zusammenhang zwischen der Leistung (in Watt) und dem Puls (in Schlägen pro Minute) herstellt.

Leistung in Watt	Laktatkonzentration in mmol/Liter	Puls
100	2,16	118
140	1,33	131
180	1,75	145
220	1,94	158
260	2,96	166
300	5,35	174
340	8,48	185

a)
- Geben Sie per linearer Regression die Funktionsgleichung zur Funktion a an, die den Puls $a(x)$ in Abhängigkeit von der Leistung x beschreibt.
- Bestätigen Sie, dass alle Funktionswerte für den Puls um weniger als 3 % vom jeweiligen Messwert abweichen. (7P)

Für die Modellierung der Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Leistung x stehen mehrere Ansätze zur Verfügung.

b) Begründen Sie, warum die Modellierung der Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Leistung x nicht angemessen durch eine verallgemeinerte Exponentialfunktion f der Art $f(x) = a + b \cdot e^{c \cdot x}$ beschrieben werden kann. (4P)

c) • Geben Sie per Regression die Gleichung einer kubischen Funktion an, die die Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Leistung beschreibt. Geben Sie die Koeffizienten mit jeweils einer Nachkommastelle mehr an, als sie im Kontrollergebnis haben.
Kontrollergebnis: $kub(x) = 4{,}7309 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 - 7{,}927 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 - 0{,}0139 \cdot x + 3{,}7956$

• Untersuchen Sie diese Laktatfunktion hinsichtlich des Gesamtverlaufs und der Güte an den einzelnen Messpunkten.

• Bestimmen Sie den minimalen Laktatwert in diesem Modell. (18P)

Rechnen Sie im Weiteren mit der Funktion *kub* aus dem Kontrollergebnis zu Aufgabenteil c).
Als untere Grenze für das Ausdauertraining gilt eine Laktatkonzentration von 2 mmol/Liter, als obere Grenze gilt 4 mmol/Liter. Dieser Ausdauerbereich ist aufgeteilt in einen Bereich, der dauerhaft, und einen Bereich, der nur für einige Minuten durchgehalten werden kann.
Die Leistung, bei der die Laktatkurve um 0,031 mmol/Liter pro Watt ansteigt, bildet die Grenze zwischen den beiden Bereichen.

d) • Bestimmen Sie die untere und die obere Leistungsgrenze für den Ausdauerbereich. Ermitteln Sie den zugehörigen Pulsbereich mit Hilfe des linearen Modells.
Falls Sie in Aufgabenteil a) zu keinem Ergebnis kommen konnten, verwenden Sie hier als Ersatz die folgende Funktionsgleichung: $a_{Ersatz}(x) = 0{,}2892 \cdot x + 94{,}32745612$

• Bestimmen Sie die Leistung, bei der die Grenze zwischen Dauerleistung und kurzfristiger Belastung erreicht wird. (12P)

Bei zunehmender körperlicher Belastung steigen nicht nur Puls und Laktatwert, sondern auch der Sauerstoffbedarf. In einer dreiminütigen Wettkampfsituation entsteht ein zusätzlicher Sauerstoffbedarf von insgesamt 10,5 Litern. Dieser erhöhte Sauerstoffbedarf kann jedoch während der dreiminütigen Belastungsphase nicht vollständig gedeckt werden.

Die Funktion s beschreibt während der dreiminütigen Belastungsphase die Rate der zusätzlich aufgenommenen Sauerstoffmenge in Litern pro Minute, dabei ist x die Zeit in Minuten ab Beginn der dreiminütigen Belastungsphase.

$$s(x) = 2{,}6 \cdot (1 - e^{-0{,}624 \cdot x}) \qquad 0 \le x \le 3$$

e) • Interpretieren Sie in der Funktionsgleichung den Wert 2,6 im Sachzusammenhang.

• Bestimmen Sie die Sauerstoffmenge (in Litern), die dem Körper unmittelbar nach der dreiminütigen Belastungsphase fehlt. (9P)

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

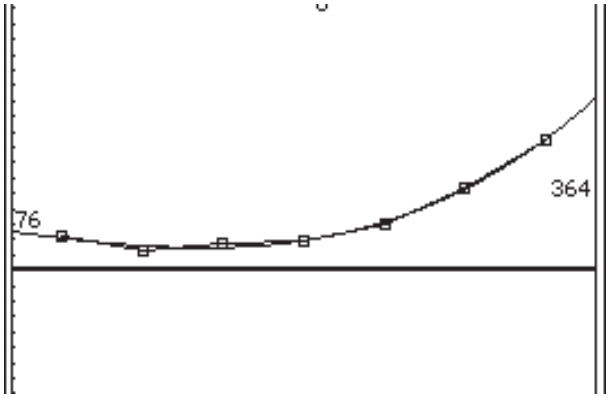
- Die Pulsfunktion a hat die Gleichung $a(x) = 0{,}275 \cdot x + 93{,}35714...$
- Die Abweichungen betragen $\frac{\text{Funktionswert}}{\text{Messwert}} - 1$:

<table>
<tr><th>Leistung a in Watt</th><th>gemessener Puls</th><th>Funktions-wert $a(x)$</th><th>Abweichung in %</th></tr>
<tr><td>100</td><td>118</td><td>120,857143</td><td>2,4%</td></tr>
<tr><td>140</td><td>131</td><td>131,857143</td><td>0,7%</td></tr>
<tr><td>180</td><td>145</td><td>142,857143</td><td>–1,5%</td></tr>
<tr><td>220</td><td>158</td><td>153,857143</td><td>–2,6%</td></tr>
<tr><td>260</td><td>166</td><td>164,857143</td><td>–0,7%</td></tr>
<tr><td>300</td><td>174</td><td>175,857143</td><td>1,1%</td></tr>
<tr><td>340</td><td>185</td><td>186,857143</td><td>1,0%</td></tr>
</table>

Alle Werte sind vom Betrage kleiner als 3 %.

</td><td>7</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Die Exponentialfunktion ist eine monotone Funktion, die Messwerte fallen jedoch bei geringer Belastung zunächst einmal ab und steigen dann an.

Andere korrekte Begründungen sind zu akzeptieren.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
c)	• Die Gleichung der Funktion ist (mit gerundeten Koeffizienten): $kub_{reg}(x) = 4{,}73090 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 - 7{,}9278 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 - 0{,}01392 \cdot x + 3{,}79564$			
	• Die Laktatfunktion *kub* passt insgesamt gut und vollzieht den Abfall der Laktatwerte im Anfangsbereich nach. Der zweite und dritte Tabellenwert fallen aber erst stärker ab und steigen dann schneller wieder an, als es die kubische Funktion darstellt, lokale Ausschläge werden also nicht so gut abgebildet.  *Die Argumentation muss entweder numerisch oder graphisch gestützt werden.*			
	• Nullstellen der Ableitungsfunktion: Aus dem Ansatz $kub'_{reg}(x) = 0$ ergibt sich $x \approx -57{,}84$ oder $x \approx 169{,}56$ *Für das Kontrollergebnis ergibt sich* $x \approx -57{,}78$ oder $x \approx 169{,}49$. Nur die positive Nullstelle ist im Sachzusammenhang sinnvoll, es liegt dort ein Minimum vor, da der Graph der Ableitungsfunktion eine nach oben geöffnete Parabel ist, also an der rechten Nullstelle einen Vorzeichenwechsel von – auf + aufweist. Es ergibt sich der minimale Laktatwert $kub_{reg}(169{,}56) \approx 1{,}462$ in mmol/Liter. *Für das Kontrollergebnis ergibt sich* $kub(169{,}49) \approx 1{,}466$.	5	13	

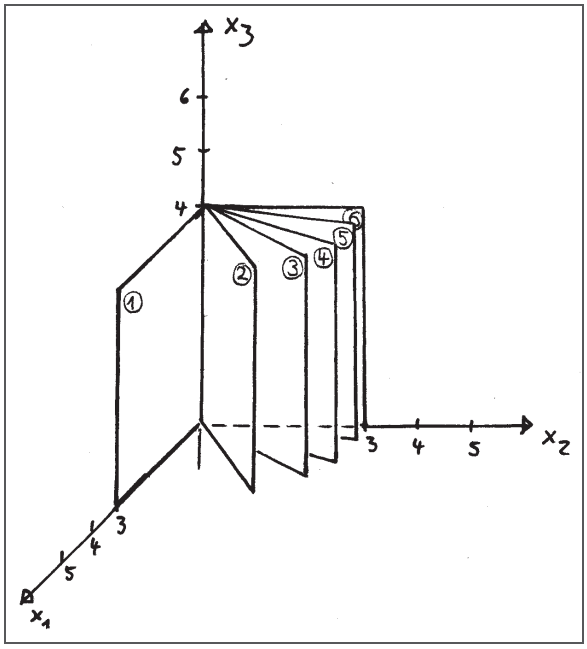
	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	$kub(x) = 2$ liefert $x \approx -161{,}1$ oder $x \approx 105{,}7$ oder $x \approx 223{,}0$ $kub(x) = 4$ liefert $x \approx -94{,}6$ oder $x \approx -16{,}39$ oder $x \approx 278{,}6$ Die negativen Werte sind im Sachzusammenhang nicht sinnvoll; der Wert 105,7 ist nicht sinnvoll, weil er in dem Leistungsbereich liegt, in dem die Laktatkurve abfällt. Zu den Leistungswerten gehören die Pulswerte $a(223{,}0) \approx 154{,}7$ $\quad a(278{,}6) \approx 170{,}0$ Der Ausdauertrainingsbereich liegt bei ca. 155 bis 170 Schlägen pro Minute. *Für die Ersatzfunktion ergeben sich ca. 159 und 175 Schläge pro Minute.* Für den trennenden Wert ist anzusetzen: $kub'(x) = 0{,}031$ Dies liefert die folgenden Lösungen: $x \approx -130{,}6$ oder $x \approx 242{,}3$ Die negative Lösung ist im Sachkontext irrelevant. Bei einer Leistung von ca. 242 Watt liegt also die Grenze zwischen Dauerbelastung und kurzfristiger Belastung.		6	6
e)	• 2,6 bildet eine obere Grenze der zusätzlichen Sauerstoffaufnahme in Litern pro Minute, in dem Intervall wird dieser Wert nicht erreicht. • Fehlende Sauerstoffmenge: $10{,}5 - \int_0^3 s(x)\,dx \approx 6{,}226$ Unmittelbar nach der Belastungsphase fehlt eine Sauerstoffmenge von ca. 6,226 Litern.		3	6
	Insgesamt 50 BWE	12	26	12

Lineare Algebra/Analytische Geometrie 1

III.1 Kulisse

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

Für das Jugendtheaterstück „Mary Plotter und das Zauberbuch" hat der Regisseur die Vorstellung, ein senkrecht stehendes, halb aufgeklapptes Buch auf die Bühne zu stellen (siehe Skizze des Bühnenbildners). Das Buch soll sechs Blätter (einschließlich der Buchdeckel) besitzen. Jedes Blatt soll 3 m breit und 4 m hoch sein. Da der Regisseur auch für die Anordnung weiterer Zauberelemente sehr genaue Vorstellungen hat, holt sich der verunsicherte Bühnenbildner einen Mathematiker zur Unterstützung.



Der Mathematiker stellt Ebenengleichungen auf, um die Lage der Blätter 1, 2, 3 und 6 zu beschreiben:

Ebene für Blatt 1: $E_{\text{Blatt 1}}: x_2 = 0$

Ebene für Blatt 2: $E_{\text{Blatt 2}}: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ebene für Blatt 3: $E_{\text{Blatt 3}}: -4x_1 + 3x_2 = 0$ und Ebene für Blatt 6: $E_{\text{Blatt 6}}: x_1 = 0$

Die Größen x_1, x_2 und x_3 sind in der Maßeinheit Meter zu verstehen.

a)
- Beschreiben Sie die jeweilige Lage der Ebenen $E_{\text{Blatt 1}}$ und $E_{\text{Blatt 6}}$ im Koordinatensystem.
- Leiten Sie aus der Parameterdarstellung der Ebene $E_{\text{Blatt 2}}$ die Koordinatengleichung $-3x_1 + 4x_2 = 0$ her. (8P)

Nun kann man sich klar machen, dass diese Ebenen tatsächlich geeignet sind, ein aufgeblättertes Buch zu beschreiben.

b) Bestätigen Sie, dass die Endpunkte des Buchrückens, nämlich die Punkte $A(0|0|0)$ und $B(0|0|4)$, in allen drei Ebenen $E_{\text{Blatt 1}}$, $E_{\text{Blatt 2}}$ und $E_{\text{Blatt 6}}$ enthalten sind. (5P)

c)
- Berechnen Sie den Winkel zwischen Blatt 1 und Blatt 2.
- Der Bühnenbildner behauptet, dass alle Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Blättern von 1 bis 6 gleich groß seien. Es stelle nur eine Täuschung dar, dass die hinteren Winkel im Schrägbild kleiner erschienen.
  Begründen Sie ohne Bezugnahme zu einer Abbildung, dass der Bühnenbildner Unrecht hat. (8P)

Die in den Raum hineinragenden Blätter sollen jeweils an der unteren vorderen Ecke auf dem Bühnenboden fixiert werden (siehe Bild in der Anlage). Dafür sind die Punkte auf dem Boden gesucht, bis zu denen die Blätter jeweils reichen. Beispielsweise ist der Punkt zu Blatt 3 der Punkt P_3.

d)
- Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes P_2.
- Ergänzen Sie den Punkt P_2 und die Projektion des Blattes 2 im Bild in der Anlage. (9P)

Mary Plotter soll während der Aufführung mit einem 3,80 m langen Zauberstab mehrere Blätter des Zauberbuches durchstoßen. Damit die Durchstoßlöcher vorbereitet werden können, stellt der Mathematiker eine Gleichung auf; der Zauberstab bewegt sich demnach entlang der folgenden Geraden:

$$g_Z : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Diese Geradengleichung soll im Weiteren vorausgesetzt werden.

Der Bühnenbildner möchte, dass der Zauberstab die ersten Blätter durchsticht, am Blatt 6 jedoch vorbeiläuft.

e)
- Bestimmen Sie die Durchstoßpunkte der Geraden g_z durch die Ebenen E_{Blatt1}, E_{Blatt2} und E_{Blatt6}.

  Kontrolllösung: Der Durchstoßpunkt durch die Ebene E_{Blatt1} lautet: $D_1\left(\frac{7}{3} \,\middle|\, 0 \,\middle|\, \frac{22}{9}\right)$.

- Zeigen Sie, dass die Buchblätter 1 und 2 von der Geraden g_Z durchstoßen werden, Blatt 6 jedoch nicht. (12P)

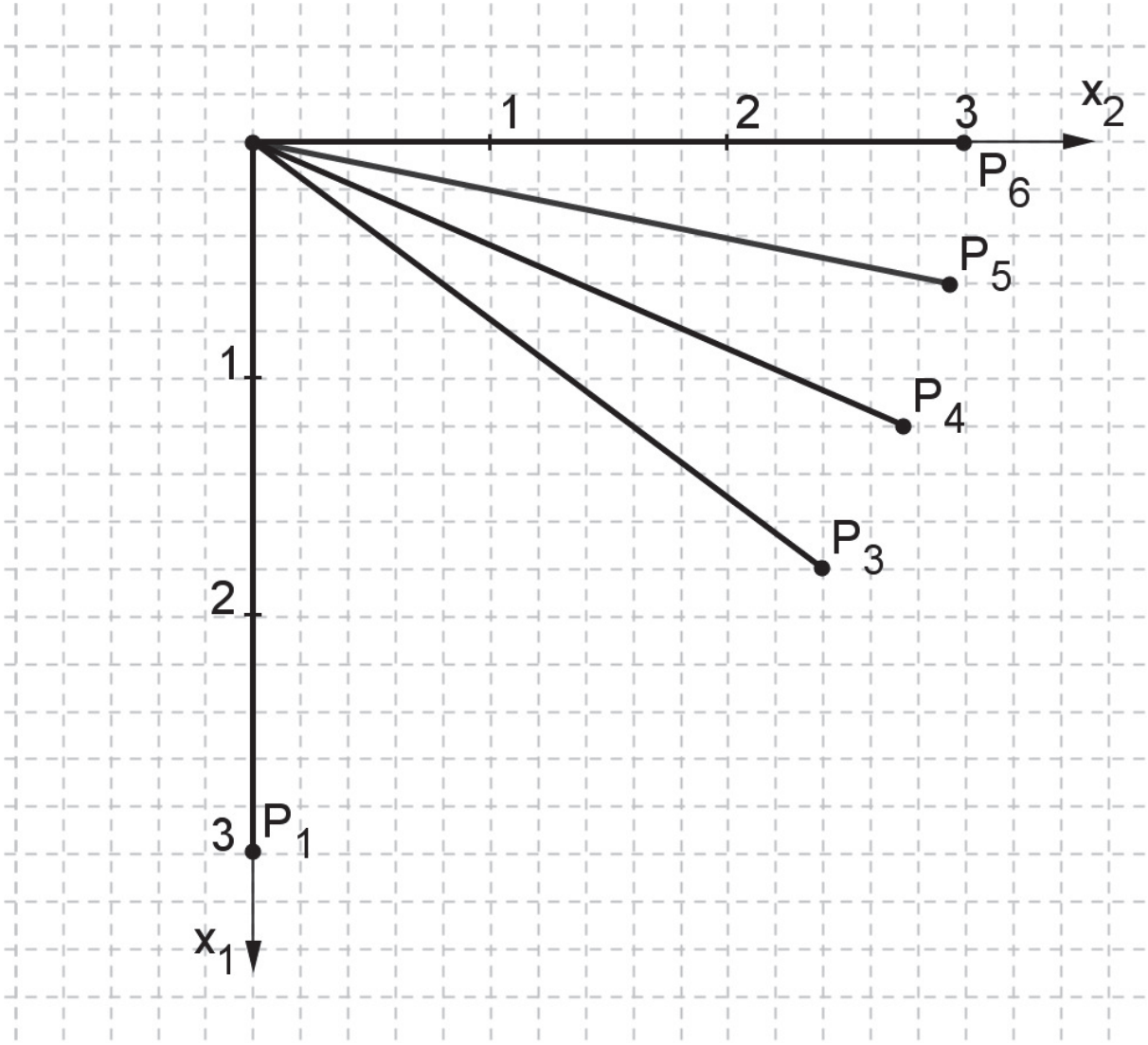
Mary Plotter befürchtet, dass sie sehr tief knien muss, um den langen Zauberstab mit Schwung von unten her durch die Blätter stoßen zu können.

f) Bestimmen Sie die Höhe des unteren Stabendes über dem Boden für den Moment, in dem das obere Stabende Blatt 1 trifft, und interpretieren Sie Ihr Ergebnis vor dem Hintergrund von Mary Plotters Befürchtungen. (8P)

Anlage zur Aufgabe „Kulisse“

Blick von oben auf den Bühnenboden (Projektion der Buchblätter auf den Bühnenboden):

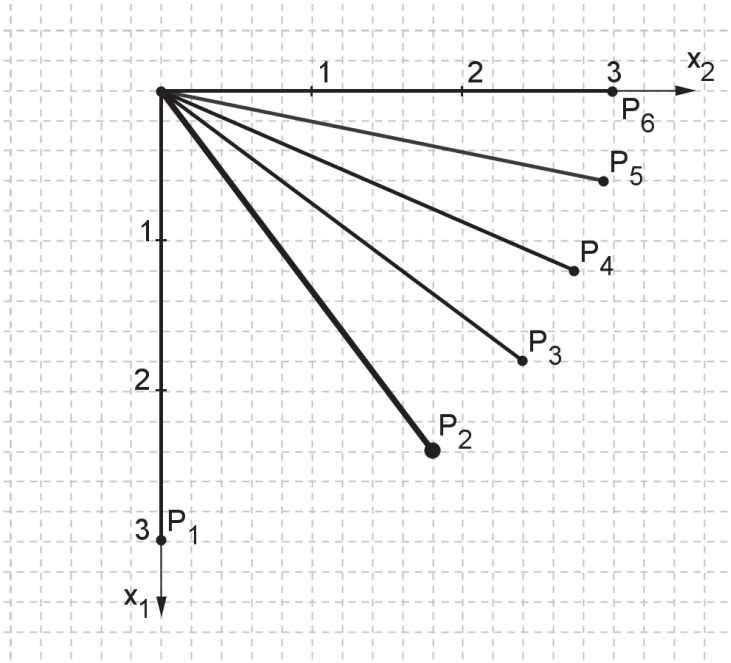
(P_1 bis P_6 sind die unteren vorderen Ecken der Blätter 1 bis 6.)



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Blatt 1 liegt in der x_1-x_3-Ebene und Blatt 6 in der x_2-x_3-Ebene. • $E_{\text{Blatt 2}}: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ Gesucht wird ein Vektor, der orthogonal zu beiden Richtungsvektoren ist. Das führt auf das Gleichungssystem $4n_1 + 3n_2 + 1n_3 = 0$ $4n_1 + 3n_2 + 0n_3 = 0$ Lösungen sind alle Vielfachen des Vektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dieser wird als Normalenvektor der Ebene verwendet. Aus dem Ansatz $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}$ – wobei $\vec{p}$ ein Ortsvektor zu einem Ebenenpunkt ist, z. B. der Nullvektor – erhält man die Gleichung $-3x_1 + 4x_2 = 0$.	2	6	
b)	Sowohl Punkt A als auch Punkt B liegen in den Ebenen $E_{\text{Blatt 1}}$ und $E_{\text{Blatt 6}}$, da in beiden Fällen sowohl $x_1 = 0$ als auch $x_2 = 0$ erfüllt ist. Die Koordinaten von A und B erfüllen die Koordinatengleichung zu $E_{\text{Blatt 2}}$, liegen also in dieser Ebene: Punkt A: $-3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$ Punkt B: $-3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$	5		

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	• Der Winkel zwischen Blatt 1 und Blatt 2 berechnet sich mit Hilfe der Normalenvektoren $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ von Blatt 1 und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ von Blatt 2. Dann ergibt sich mit $\cos(\alpha_{1,2}) = \frac{\left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert}{1 \cdot 5} = \frac{4}{5}$ der Winkel $\alpha_{1,2} = 36{,}8699...°$. Der gesuchte Winkel beträgt also rund 36,9°. • Da der Winkel zwischen Blatt 1 und Blatt 6 offensichtlich 90° beträgt, können nicht alle fünf Winkel 36,9° betragen, denn $5 \cdot 36{,}9° > 90°$. Der Bühnenbildner hat also nicht recht. *Stattdessen könnte z. B. auch der Winkel zwischen Blatt 2 und Blatt 3 berechnet werden.*	4	4	

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
d)	• Die Koordinaten des Punktes P_2 berechnen sich als Lösungen des Gleichungssystems: $\begin{array}{l}\sqrt{x_1^2+x_2^2}=3\\ -3x_1+4x_2=0\end{array}$. Es ergeben sich die Lösungen: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2,4\\-1,8\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2,4\\1,8\end{pmatrix}$. Für die untere, vordere Ecke müssen die positiven Werte gewählt werden, also ergibt sich $P_2\left(2,4\,\vert\,1,8\,\vert\,0\right)$. *Eine rein zeichnerische Lösung zur Ermittlung der Koordinaten von P_2 ist nicht zu akzeptieren.* • Blick von oben auf den Bühnenboden: *Hinweis: Konnte P_2 nicht ermittelt werden, darf der Punkt durch Abmessen von Winkel und Strecke eingetragen werden.*  	2	5	2

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	• Bestimmung der Durchstoßpunkte: Blatt 1: $x_2 = 0$ muss erfüllt werden. Daraus folgt die Gleichung $-1 + r \cdot 9 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1}{9}$. Durch Einsetzen von r in g_z ergibt sich der Durchstoßpunkt $D_1\left(\frac{7}{3} \,\middle\vert\, 0 \,\middle\vert\, \frac{22}{9}\right)$. Blatt 2: $-3x_1 + 4x_2 = 0$ muss erfüllt werden. Daraus folgt die Gleichung $-3 \cdot (3 - 6r) + 4 \cdot (-1 + 9r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{13}{54}$. Durch Einsetzen von r in g_z ergibt sich der Durchstoßpunkt $D_2\left(\frac{14}{9} \,\middle\vert\, \frac{7}{6} \,\middle\vert\, \frac{80}{27}\right)$. Blatt 6: Aus $x_1 = 0$ ergibt sich $3 - 6r = 0 \Leftrightarrow r = 0{,}5$. Daraus berechnet sich durch Einsetzen in die Geradengleichung $D_6(0 \mid 3{,}5 \mid 4)$. • Es ist nun zu prüfen, ob Blatt 1 und Blatt 2 durchstoßen werden. Damit D_1 tatsächlich innerhalb des Blattes 1 liegt, muss $0 < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{7}{3} < 3$ und $0 < x_3 = \frac{22}{9} < 4$ gelten. Beides ist erfüllt. Damit D_2 tatsächlich innerhalb des Blattes 2 liegt, muss $0 < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\left(\frac{14}{9}\right)^2 + \left(\frac{7}{6}\right)^2} \approx 1{,}94 < 3$ und $0 < x_3 = \frac{80}{27} \approx 2{,}96 < 4$ gelten. Beides ist offenbar erfüllt. Da für den Punkt $D_6(0 \mid 3{,}5 \mid 4)$ die zweite Koordinate größer als 3 ist und Blatt 6 in der x_2-x_3-Ebene liegt, befindet sich D_6 außerhalb des Buchblattes.		6	6

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	Es wird der Punkt gesucht, der einen Abstand 3,8 von D_1 hat und auf der Geraden des Zauberstabs g_z liegt. Man setzt also an: $\left\|\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-6\\9\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\0\\\frac{22}{9}\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}\frac{2}{3}-6r\\-1+9r\\-\frac{4}{9}+4r\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-6r\right)^2+(-1+9r)^2+\left(-\frac{4}{9}+4r\right)^2}=3{,}8$ Diese Gleichung hat zwei Lösungen: $r_1=-0{,}21839...$und $r_2=0{,}44061...$ Für diese Fragestellung ist nur die negative Lösung sinnvoll. Würde man nämlich r_2 in die Geradengleichung einsetzen, ergäbe sich ein Punkt auf einer Höhe von $x_3=2+0{,}4406..\cdot 4\approx 3{,}76$. Dieses kann nicht sein, da die Blätter von unten durchstoßen werden. Es ergibt sich durch Einsetzen von r_1 in die Geradengleichung der Punkt $(4{,}310..\|-2{,}965...\|1{,}126...)$. Das untere Ende des Zauberstabes befindet sich somit auf einer Höhe von ca.1,13 m. Mary Plotter muss nicht knien, ihre Befürchtungen sind grundlos.		4	4
	Insgesamt 50 BWE	13	25	12

Lineare Algebra/Analytische Geometrie 2

III.2 Infizierte Schädlinge

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

Um die Umwelt nicht übermäßig zu belasten, sollen Schädlinge biologisch mit speziellen Krankheitskeimen bekämpft werden. Diese Krankheitskeime können nur die gewünschte Schädlingsart infizieren und sind für andere Lebewesen unwirksam. Infizierte Schädlinge können diese Infektion innerhalb der Population weiter verbreiten, erkranken oder daran sterben, aber auch wieder gesunden. Nach einer gezielten Infizierung kann die Population der Schädlinge in folgende Gruppen eingeteilt werden: Gesunde (G), Infizierte (I), Erkrankte (E) und Tote (T).

Die Bekämpfung der Schädlinge erfolgt durch eine einmalige Infizierung. Außer dieser Schädlingsbekämpfung sollen keine anderen Gründe für eine Veränderung der Anzahlen in den einzelnen Gruppen wie z. B. Geburten oder Tierfraß betrachtet werden.

Das Diagramm in der Anlage stellt eine Beschreibung der Übergangsraten zwischen den einzelnen Gruppen für eine Zeiteinheit von einer Woche dar.

Eine Population n Wochen nach der Infizierung der Schädlinge wird durch den Vektor $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} G_n \\ I_n \\ E_n \\ T_n \end{pmatrix}$ beschrieben. Hierbei sind G_n, I_n, E_n und T_n die jeweiligen Anzahlen der gesunden, infizierten, erkrankten und toten Schädlinge dieser Population nach n Wochen. Im Rahmen des hier betrachteten Modells wird die Population nach (n+1) Wochen durch $\vec{v}_{n+1} = A \cdot \vec{v}_n$ ermittelt, wobei A eine Übergangsmatrix darstellt.

a)
- Geben Sie an, welche der folgenden Matrizen in diesem Modell eine geeignete Übergangsmatrix für den in der Anlage gezeigten Prozess darstellt.
- Begründen Sie, warum die beiden anderen Matrizen in diesem Modell nicht geeignet sind. (8P)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,05 & 0,05 \\ 0,3 & 0,3 & 0 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0,05 & 0,05 \\ 0,3 & 0,3 & 0,35 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,5 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0 \\ 0,1 & 0,05 & 0,35 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0,05 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch intensive Forschungen konnte die Schädlingsbekämpfung mittels Infizierung in den letzten Jahren effizienter gestaltet werden und lässt sich nun mit der Übergangsmatrix M beschreiben. Führen Sie im Folgenden alle Berechnungen mit dieser Matrix durch.

$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,05 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0,1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)
- Berechnen Sie die Anzahlen in den einzelnen Gruppen der Schädlinge nach einer und nach 10 Wochen, wenn zu Beginn der Schädlingsbekämpfung von 10000 Schädlingen insgesamt 10 % infiziert sind und alle anderen gesund sind.
- Berechnen Sie, wie viel Prozent dieser 10000 Schädlinge nach den 10 Wochen leben. (10P)

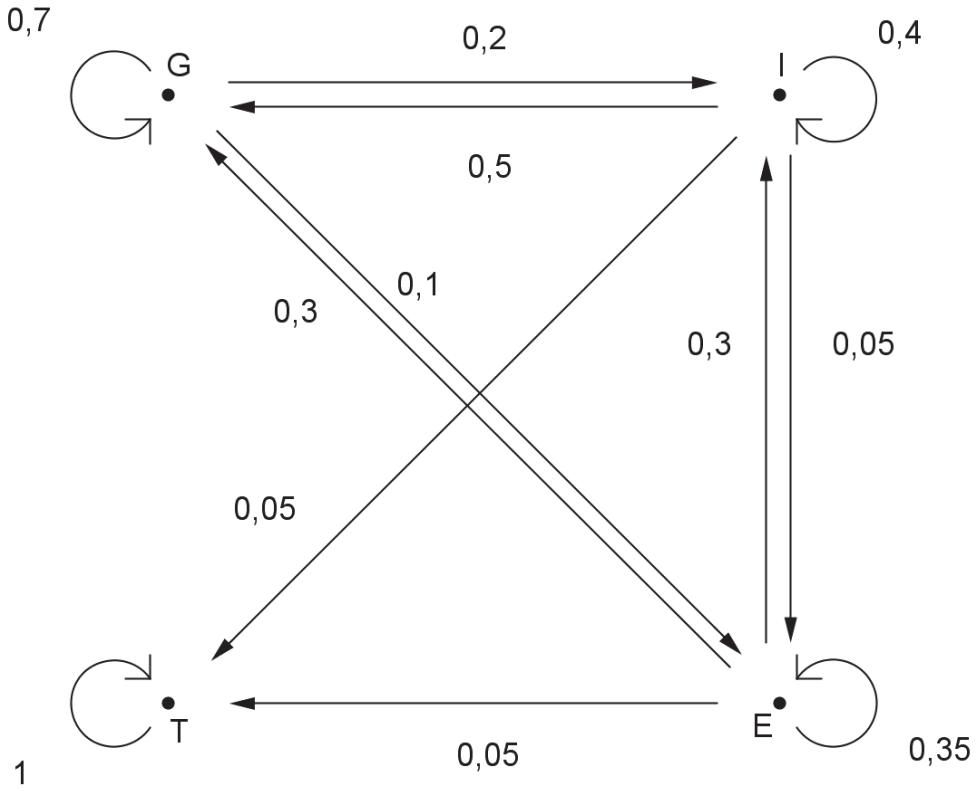
c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. (10P)

d) Begründen Sie, dass im vorliegenden Modell diese Art der Schädlingsbekämpfung langfristig immer zum Tod aller Schädlinge führt. (11P)

In einem Labor wird die Ausbreitung der Infektion untersucht. Hier werden während der laufenden Untersuchung 3000 gesunde, 5000 infizierte und 2000 erkrankte Schädlinge ermittelt
Hinweis: Die Anzahl der toten Schädlinge wurde vom Labor nicht ermittelt.

e) Begründen Sie, dass in diesem Labor nicht die gleichen Übergangsraten vorlagen. (11P)

Anlage zur Aufgabe „Infizierte Schädlinge“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	• Die gesuchte Matrix ist A_3. • Laut Diagramm bleiben 100 % der Toten auch im nächsten Zeitschritt tot, dies wird im Diagramm durch den Wert 1 beim Zustand T angezeigt. In der Matrix muss also rechts unten der Wert 1 erscheinen. Dies ist bei A_1 nicht der Fall. A_2 ist nicht geeignet, da die Spaltensummen nicht 1 sind. Dadurch werden nicht 100 % der Schädlinge einer Gruppe in die nächste Woche mit übernommen. Die Summe aller Schädlinge muss unabhängig vom aktuellen Bestandsvektor aber immer konstant sein, da keine Schädlinge dazukommen oder verschwinden. *Die letzte Begründung kann auch als Argument, A_1 auszuschließen, gelten. Alternative Begründungen sind möglich.*	3	5	
b)	• Es ist laut Vorgaben: $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 9000 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Damit berechnen sich die Anzahlen in den Gruppen der Schädlinge nach einer bzw. nach 10 Wochen mit: $\vec{v}_1 = M \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 4900 \\ 3200 \\ 1850 \\ 50 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{v}_{10} = M^{10} \cdot \vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} 2961 \\ 2768 \\ 1300 \\ 2971 \end{pmatrix}$. • Also sind insgesamt 2961 + 2768 + 1300 = 7029 Schädlinge nicht gestorben. $\frac{7029}{10000} = 0{,}7029$. Der Prozentsatz, der nach diesen 10 Wochen noch lebenden Schädlingen ist ca. 70,3 %. *Rundet der Prüfling aus sachkontextualen Gründen grundsätzlich <u>ab</u>, so ist dies zu akzeptieren.*	10		

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
c)	Gesucht sind alle Lösungen der Gleichung $M \cdot \vec{x} = \vec{x}$. Das dazugehörige Gleichungssystem $\begin{array}{rcrcrcrcl} 0{,}5x_1 & + & 0{,}4x_2 & + & 0{,}2x_3 & & & = & x_1 \\ 0{,}3x_1 & + & 0{,}5x_2 & + & 0{,}3x_3 & & & = & x_2 \\ 0{,}2x_1 & + & 0{,}05x_2 & + & 0{,}4x_3 & & & = & x_3 \\ & & 0{,}05x_2 & + & 0{,}1x_3 & + & x_4 & = & x_4 \end{array}$ liefert $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ mit einem freien Wert für x_4. Damit sind alle Lösungen der Gleichung Vielfache des Vektors: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeitlich konstante Verteilungen existieren also genau für den Fall, dass alle Schädlinge tot sind.		7	3
d)	$M^{50} \approx \begin{pmatrix} 0{,}0626 & 0{,}0601 & 0{,}0544 & 0 \\ 0{,}0585 & 0{,}0562 & 0{,}0509 & 0 \\ 0{,}0275 & 0{,}0264 & 0{,}0239 & 0 \\ 0{,}8513 & 0{,}8573 & 0{,}8709 & 1 \end{pmatrix}$, $M^{100} \approx \begin{pmatrix} 0{,}0089 & 0{,}0086 & 0{,}0078 & 0 \\ 0{,}0084 & 0{,}0080 & 0{,}0073 & 0 \\ 0{,}0039 & 0{,}0038 & 0{,}0034 & 0 \\ 0{,}9788 & 0{,}9796 & 0{,}9816 & 1 \end{pmatrix}$ $M^{200} \approx \begin{pmatrix} 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0 \\ 0{,}0002 & 0{,}0002 & 0{,}0001 & 0 \\ 0{,}0001 & 0{,}0001 & 0{,}0001 & 0 \\ 0{,}9996 & 0{,}9996 & 0{,}9996 & 1 \end{pmatrix}$. Die für die Werte in den ersten drei Vektorkomponenten ausschlaggebenden ersten drei Matrixzeilen nähern sich in allen Komponenten mit wachsendem Exponenten dem Wert Null. Dadurch berechnet sich für alle Startvektoren mit zunehmender Zeit annähernd ein Bestand von ausschließlich toten Schädlingen. *Es kann auch mit allgemeinen Bestandsvektoren gerechnet werden. Eine Argumentation, die sich lediglich auf konkrete Startvektoren bezieht, wird nur mit Teilpunkten bewertet.* *Auch eine Argumentation mithilfe der Eigenwerte ist möglich.*		9	2

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
e)	Der aktuell gezählte Bestand an Schädlingen ist $\vec{w}_0 = \begin{pmatrix} 3000 \\ 5000 \\ 2000 \\ \mu \end{pmatrix}$. Gesucht wird der Bestand zum vorherigen Zeitpunkt, also $\vec{w}_{-1}$. Damit ergibt sich die zu lösende Gleichung: $M \cdot \vec{w}_{-1} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 5000 \\ 2000 \\ \mu \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{array}{rcrcrcrcr} 0{,}5x_1 & + & 0{,}4x_2 & + & 0{,}2x_3 & & & = & 3000 \\ 0{,}3x_1 & + & 0{,}5x_2 & + & 0{,}3x_3 & & & = & 5000 \\ 0{,}2x_1 & + & 0{,}05x_2 & + & 0{,}4x_3 & & & = & 2000 \\ & & 0{,}05x_2 & + & 0{,}1x_3 & + & x_4 & = & \mu \end{array}$ Es ergibt sich: $\vec{w}_{-1} \approx \begin{pmatrix} -3010 \\ 8544 \\ 5437 \\ \mu - 971 \end{pmatrix}$ Die erste Komponente ist negativ. Da eine Anzahl nicht negativ sein kann, ist dieser Bestandsvektor nicht möglich. Der genannte Schädlingsbestand kann also nicht durch einen Prozess, der mithilfe der Matrix M modelliert wird, entstanden sein.		4	7
	Insgesamt 50 BWE	13	25	12

Stochastik 1

IV.1 Pfusch am Bau

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

Die Firma Fertighaus Hamburg Bau (FHH-Bau) stellt Fertighäuser her und wirbt damit, dass nur bei 2,7 % ihrer Häuser nach der Schlüsselübergabe ernsthafte Mängel beanstandet werden. Eine Investorengruppe überlegt, eine Siedlung mit 153 Fertighäusern von FHH-Bau bauen zu lassen. Die Gruppe beauftragt einen Berater, verschiedene Risiken zu analysieren.

Zuerst möchte der Berater das Auftreten von Baumängeln untersuchen. Dabei unterscheidet er nur nach „Das Haus hat Mängel“ und „Das Haus hat keine Mängel“. Er geht zusätzlich von der Annahme aus, dass die Anzahl der Häuser, die Mängel aufweisen, binomialverteilt ist.

a) Geben Sie an, welche mathematische Bedingung erfüllt sein muss, damit die Annahme des Beraters gerechtfertigt ist. (3P)

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Anzahl der Häuser mit Baumängeln binomialverteilt ist.

b) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Siedlung
- genau 2 Häuser,
- mehr als 2 Häuser,
- höchstens 4 Häuser

mit Mängeln gebaut werden. (6P)

c) Berechnen Sie, mit wie vielen Reklamationen wegen baulicher Mängel die Investorengruppe im Mittel rechnen muss. (3P)

Gerüchten zufolge sind die Daten auf der Webseite von FHH-Bau geschönt. Der Berater schätzt die tatsächliche Mängelquote aufgrund der Daten vom Bauamt höher als 2,7%. Der Berater führt unter den bisherigen Kunden eine anonyme Umfrage durch, um die Mängelquote nach oben abzusichern. Er befragt 87 ehemalige Kunden der FHH-Bau und legt fest, dass er die Nullhypothese („Die Mängelquote ist 2,7%.“) ablehnt, wenn bei der Umfrage mehr als 5 Teilnehmer Mängel an dem Haus von FHH-Bau festgestellt haben.

d)
- Interpretieren Sie für den obigen Test sowohl den Fehler 1. Art als auch den Fehler 2. Art vor dem Hintergrund des dargelegten Sachkontextes.
- Bestimmen Sie für den obigen Test die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.
- Bestimmen Sie in Tabellenform für den obigen Test die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten für den Fehler 2. Art für angenommene tatsächliche Mängelwahrscheinlichkeiten zwischen 0,02 und 0,12 in Schritten von 0,01 und beurteilen Sie mithilfe dieser Ergebnisse die Aussagekraft des Tests. (17P)

Die oben behauptete Mängelquote von 2,7 % stützt sich auf relative Häufigkeiten bei einer früheren sehr umfangreichen Untersuchung. Diese Untersuchung ergab nämlich, dass innerhalb der vierjährigen Gewährleistungsfrist der Baufirma FHH-Bau in 2,7 % aller Häuser Mängel auftraten *und* reklamiert wurden. Der Berater der Investorengruppe stutzt bei dieser Formulierung und forscht weiter nach. Er befürchtet, dass viele Mängel innerhalb der Gewährleistungsfrist unerkannt bleiben und erst danach erkannt und reklamiert werden. Der Ärger der Käufer würde nach Ablauf der Gewährleistungsfrist dann möglicherweise seine Auftraggeber – die Investorengruppe – statt die Baufirma FHH-Bau treffen. Er erfährt aus der Untersuchung auch, dass sogar bei 4,0% aller Fertighäuser Mängel vorhanden sind, offenbar werden also innerhalb der Gewährleistungsfrist viele Mängel nicht erkannt und reklamiert. Weiterhin geht aus der Untersuchung hervor, dass in 2,5% der mängelfreien Häuser innerhalb der Gewährleistungsfrist fälschlicherweise Mängel reklamiert werden.

e)
- Berechnen Sie die fehlenden Werte für die relativen Häufigkeiten in der Vierfeldertafel in der Anlage.
- Verwenden Sie die relativen Häufigkeiten als Näherungswerte für entsprechende Wahrscheinlichkeiten und bestimmen Sie so die Wahrscheinlichkeit dafür,
  - dass ein Haus ohne Mängel ist unter der Bedingung, dass innerhalb der Gewährleistungsfrist keine Mängel reklamiert wurden.
  - dass ein Haus auch tatsächlich Mängel hat unter der Bedingung, dass innerhalb der Gewährleistungsfrist Mängel reklamiert wurden.
- Interpretieren Sie die Ergebnisse im Hinblick auf die Befürchtung des Beraters. (12P)

Die Firma FHH-Bau bietet eine Gewährleistungsfrist von 4 Jahren an. Die Investorengruppe erhöht auf eigene Kosten die Gewährleistungsfrist um ein weiteres Jahr auf 5 Jahre. Für Mängel, die im fünften Jahr gemeldet werden, muss die Investorengruppe also selbst aufkommen. Gehen Sie davon aus, dass die Zeit, die nach Bauübergabe vergeht, bis vorhandene Mängel entdeckt und reklamiert werden, normalverteilt ist mit $\mu = 2{,}9$ und $\sigma = 1{,}6$. Die Funktionsgleichung zur zugehörigen Dichtefunktion lautet also:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 1{,}6} \cdot e^{-\frac{(t-2{,}9)^2}{2 \cdot 1{,}6^2}}$$

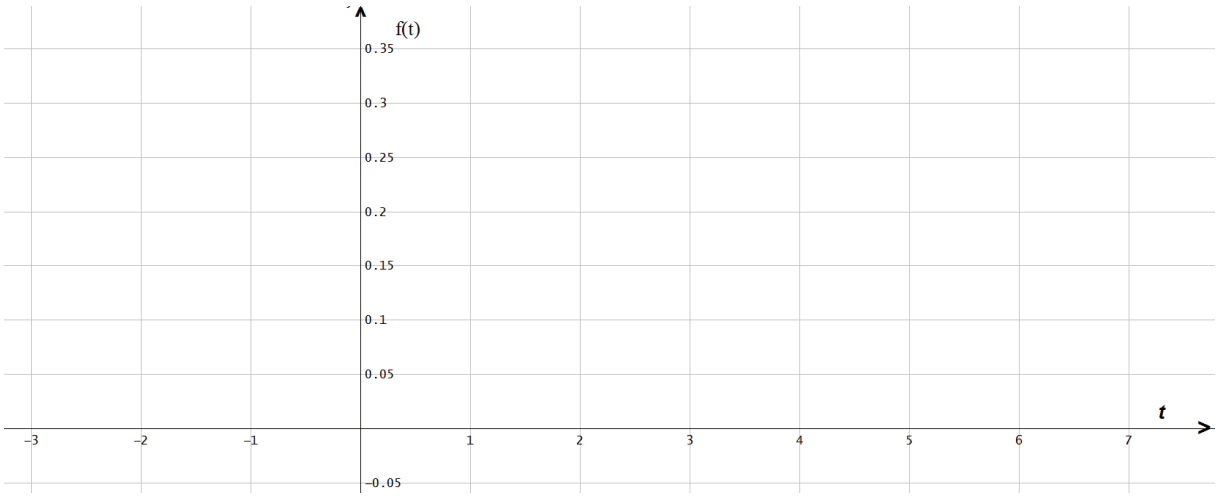
f)
- Zeichnen Sie den Graphen der Dichtefunktion f in das Koordinatensystem in der Anlage.
- Berechnen Sie den Wert für $\int_4^5 f(t)\,dt$ und interpretieren Sie das Integral im Sachkontext.(9P)

Anlage 1 zur Aufgabe „Pfusch am Bau“

Vierfeldertafel

	Mängel in der Gewährleistungsfrist reklamiert	keine Mängel in der Gewährleistungsfrist reklamiert	Summe
Haus hat Mängel			
Haus hat keine Mängel			
Summe			100,0%

Anlage 2 zur Aufgabe „Pfusch am Bau“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	Es gibt eine feste Erfolgswahrscheinlichkeit (2,7%), die für alle Häuser unabhängig von dem Auftreten von Mängeln bei allen anderen Häusern gleich ist.	3		
b)	• $P(X=2) \approx 0{,}1359 \approx 14\%$ • $P(X>2) = 1 - P(X \le 2) \approx 0{,}7845 \approx 78\%$ • $P(X \le 4) \approx 0{,}6029 \approx 60\%$		6	
c)	$\mu = n \cdot p = 4{,}131$ Die Investorengruppe muss mit durchschnittlich ca. 4 Reklamationen rechnen.	3		
d)	• Fehler 1. Art: Die Nullhypothese wird verworfen, obwohl sie zutrifft. In diesem Sachkontext bedeutet dies, dass die Angaben von FHH-Bau stimmen, in der Umfrage jedoch mehr als 5 Teilnehmer angeben, dass ihr Haus Mängel hat. Fehler 2. Art: Die Nullhypothese wird *nicht* verworfen, obwohl sie *nicht* zutrifft. In diesem Sachkontext bedeutet dies, dass die Angaben von FHH-Bau *nicht* stimmen, in der Umfrage jedoch höchstens 5 Teilnehmer angeben, dass ihr Haus Mängel hat. • X: Anzahl der Häuser mit Mängeln $n = 87;\ p = 0{,}027$ $\alpha = P(X>5) = 1 - P(X \le 5) \approx 0{,}0306 \approx 3\%$ Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art beträgt ungefähr 3%. • X: Anzahl der Häuser mit Mängeln $n = 87;\ \beta = P(X \le 5)$		8	9

p	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12
$\beta \approx$	0,99	0,95	0,86	0,73	0,58	0,43	0,30	0,19	0,12	0,07	0,04

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art wird erst für sehr hohe Mängelquoten (mehr als viermal so groß wie die Angabe von FHH-Bau) hinreichend klein, insofern ist der Test nur bedingt aussagekräftig.

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
e)	• Vierfeldertafel:			

	Mängel in der Gewährleistungsfrist reklamiert	keine Mängel in der Gewährleistungsfrist reklamiert	Summe
Haus hat Mängel	2,7%	1,3%	4,0%
Haus hat keine Mängel	2,4%	93,6%	96,0%
Summe	5,1%	94,9%	100,0%

Rechnungen:

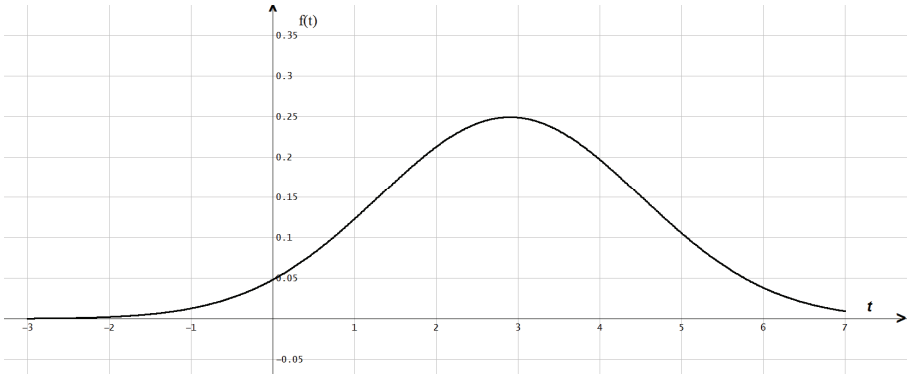
$$4{,}0 - 2{,}7 = 1{,}3$$
$$100{,}0 - 4{,}0 = 96{,}0$$
$$\frac{2{,}5}{100} \cdot 96 = 2{,}4$$
$$96{,}0 - 2{,}4 = 93{,}6$$
$$2{,}7 + 2{,}4 = 5{,}1$$
$$1{,}3 + 93{,}6 = 94{,}9$$

• $P_{\text{keine Mängel reklamiert}}(\text{"Haus hat keine Mängel"}) = \frac{93{,}6}{94{,}6} \approx 99\%$

$P_{\text{Mängel reklamiert}}(\text{"Haus hat Mängel"}) = \frac{2{,}7}{5{,}1} \approx 53\%$

• Für die Befürchtung des Beraters ist die Wahrscheinlichkeit $P_{\text{keine Mängel reklamiert}}(\text{"Haus hat keine Mängel"})$ aussagekräftig:
Wenn innerhalb der Gewährleistungsfrist keine Mängel an dem Haus von FHH-Bau reklamiert werden, ist das Haus mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit (ca. 99%) mängelfrei. Die Sorge des Beraters, dass es viele unentdeckte Mängel gibt, ist also weitgehend unbegründet.

I	II	III
3	6	3

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
f)	•  • $\int_4^5 f(t)\,dt \approx 0{,}151$ Das Integral gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass vorhandene Mängel im fünften Jahr – also zu Lasten der Investorengruppe – entdeckt und reklamiert werden.	4	5	
	Insgesamt 50 BWE	13	25	12

Stochastik 2

IV.2 Spielautomat

Dokumentieren Sie Ihre Lösungswege für jede Aufgabe so, dass man Ihre Vorgehensweise auch ohne CAS nachvollziehen kann.

Ein Spieler spielt an einem Spielautomaten. Er setzt immer einen Euro ein. In jeder Runde beträgt seine Gewinnwahrscheinlichkeit 0,48, die Auszahlung beträgt im Gewinnfall zwei Euro (er hätte dann einen Euro gewonnen), im Verlustfall wird der Euro einbehalten.

Der Spieler spielt insgesamt zehn Spiele.

a) Geben Sie die Bedingungen an, die erfüllt sein müssen, damit dieses Spiel als Bernoulli-Kette angesehen werden kann. (3P)

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass das Spiel als Bernoullikette angesehen werden kann.

b) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass er

- alle Spiele gewinnt,
- genau die Hälfte der Spiele gewinnt.

Ermitteln Sie auch jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass er

- mehr als die Hälfte der Spiele gewinnt,
- im Wechsel gewinnt und verliert. (9P)

Ein anderer Spieler beginnt mit einem Guthaben von nur einem Euro. Sobald das Guthaben auf Null geschrumpft ist, beendet er das Spielen, ansonsten spielt er weiter. Sein Einsatz ist jedes Mal ein Euro.

c)
- Vervollständigen Sie das Baumdiagramm in der Anlage für die ersten drei Spielrunden mit allen Verzweigungswahrscheinlichkeiten und den aktuellen Guthaben nach jeder Spielrunde.
- Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler nach dem ersten, nach dem zweiten, nach dem dritten, nach dem vierten, nach dem fünften Spiel das Guthaben 0 € hat. (12P)

Der Betreiber hat das Gerücht gehört, dass sein Automatentyp mehr auszahlt, als es der angegeben Gewinnwahrscheinlichkeit von 48 % entspricht, und will dies, bevor er sich beim Hersteller beschwert, mit einem Signifikanztest auf dem 5%-Niveau überprüfen. Dazu will er eine Versuchsserie von 80 Spielen auswerten.
Die Nullhypothese lautet: Der Spielautomat hat – für den Spieler – die Erfolgswahrscheinlichkeit 0,48.
Die Alternativhypothese lautet: Die Erfolgswahrscheinlichkeit ist größer.

d)
- Berechnen Sie den Erwartungswert für die Zufallsvariable "Anzahl der Gewinne".
- Bestimmen Sie, ausgehend von einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 %, den Ablehnungsbereich.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art. (12P)

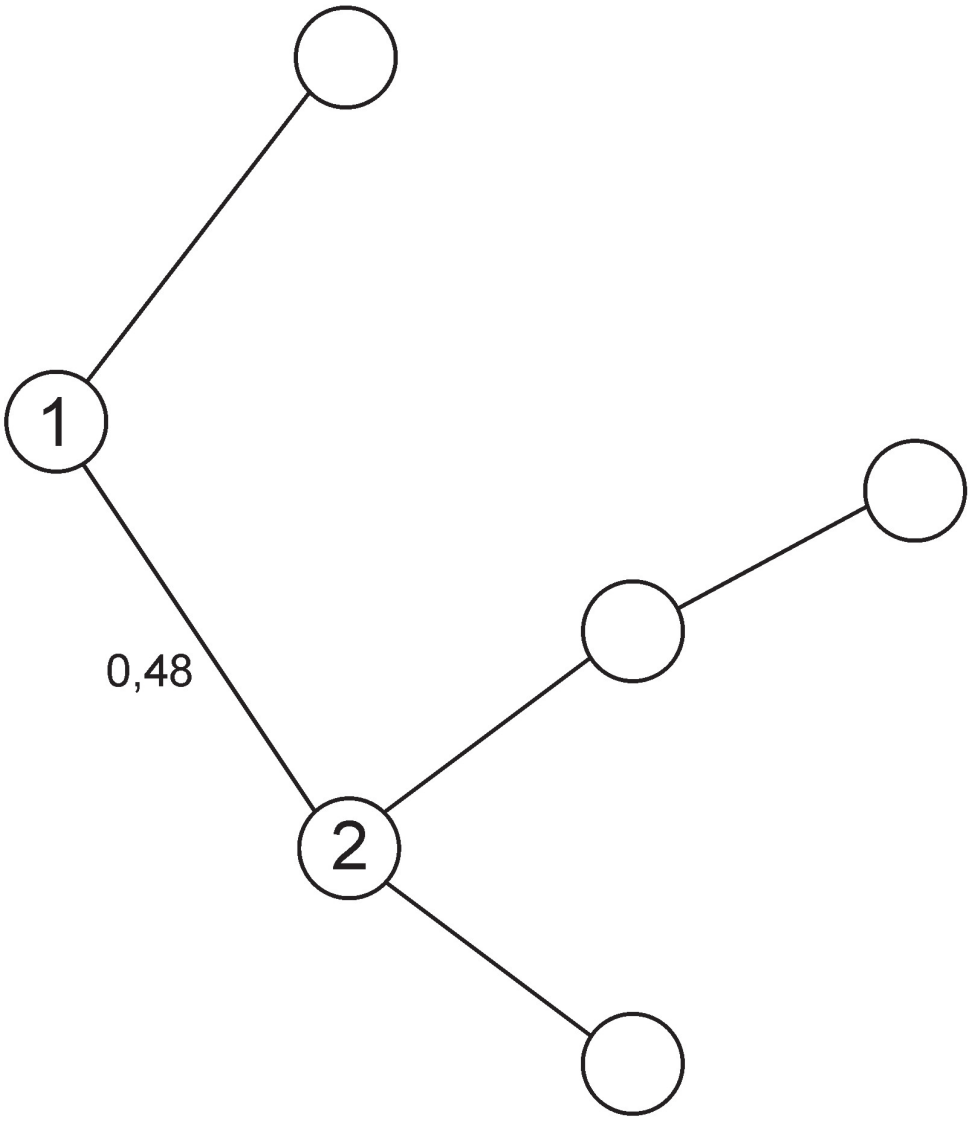
e)
- Interpretieren Sie den Fehler 2. Art in diesem Sachzusammenhang.
- Ermitteln Sie mithilfe einer Tabelle für 12 verschiedene Werte für die tatsächliche Gewinnwahrscheinlichkeit zwischen 0,48 und 0,70 (Schrittweite 0,02) die zugehörige Wahrscheinlichkeiten für den Fehler 2. Art und beurteilen Sie die Tabelle im Kontext der Aufgabe.

  Falls Sie in Aufgabenteil d) keinen Ablehnungsbereich ermitteln konnten, verwenden Sie für Ihre Überlegungen in diesem Aufgabenteil den (nicht korrekten) Ablehnungsbereich [48; 80]. (8P)

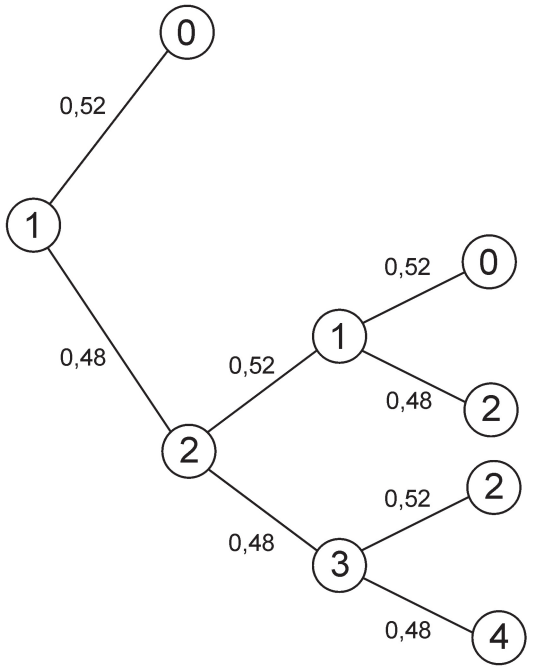
Der Betreiber des Spielautomaten hat in einer Computerzeitschrift gelesen, dass in den Automaten Chips eingebaut sind, mit denen sich die Erfolgswahrscheinlichkeit einstellen lässt. Der in seinem Automaten eingebaute Chip lässt sich angeblich auf die Gewinnwahrscheinlichkeit 0,48 oder 0,50 oder 0,52 einstellen. Der Betreiber hält alles für möglich und nimmt deshalb a priori an, dass alle drei Einstellungen gleichwahrscheinlich sind. Er spielt nun 80-mal am Automaten. Er – als Spieler – gewinnt 38-mal. Diese Information will er nun auswerten.

f) Bestimmen Sie mithilfe der Information, dass der Spieler 38 von 80 Spielen gewonnen hat, jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spielautomat die Erfolgswahrscheinlichkeit 0,48; 0,50 bzw. 0,52 (für den Spieler) besitzt. (6P)

Anlage zur Aufgabe „Spielautomat“



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung I	II	III
a)	(1) Es gibt nur zwei mögliche Ergebnisse: Man gewinnt oder man verliert. (2) Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist für jedes Spiel unabhängig von den Ergebnissen vorheriger Spiele immer dieselbe.	3		
b)	X ist die Anzahl der Erfolge des Spielers. • $P(X=10) \approx 0{,}000649 \approx 0{,}065\%$ • $P(X=5) \approx 0{,}244 \approx 24\%$ • $P(X>5) = 1 - P(X \leq 5) \approx 0{,}329 \approx 33\%$ • $P(\text{abwechselnd Gewinn/Verlust}) = 2 \cdot 0{,}48^5 \cdot 0{,}52^5 \approx 0{,}00194 \approx 0{,}19\%$ *Der Faktor 2 in der letzten Rechnung rührt daher, dass man mit Gewinn oder mit Verlust in der ersten Runde beginnen kann.*	4	5	
c)	• Baumdiagramm:  			

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
	• Aus dem Baumdiagramm wird deutlich, dass man nach dem ersten Spiel und oder nach dem dritten Spiel bei 0 € landen kann, nicht jedoch nach dem zweiten Spiel. Nach dem vierten Spiel ist der Spielstand 0 € ebenfalls nicht erreichbar, weil jeweils nur 1 € verloren werden kann, und dies führt bei den Spielständen 2 € bzw. 4 € minimal zu 1 € bzw. 3 €. Nach dem fünften Spiel kann man den Spielstand 0 € erreichen, wenn man beim Spielstand von 2 € nach dem dritten Spiel (der auf zwei Pfaden erreicht werden kann) zweimal hintereinander verliert. Im Einzelnen: $P(\text{Spielstand 0 € nach dem ersten Spiel}) = 0{,}52$ $P(\text{Spielstand 0 € nach dem zweiten Spiel}) = 0$ $P(\text{Spielstand 0 € nach dem dritten Spiel}) = 0{,}48 \cdot 0{,}52^2 = 0{,}129792 \approx 0{,}13$ $P(\text{Spielstand 0 € nach dem vierten Spiel}) = 0$ $P(\text{Spielstand 0 € nach dem fünften Spiel}) = 2 \cdot 0{,}48^2 \cdot 0{,}52^3 \approx 0{,}065$	4	6	2

d)

- Da es sich um eine Bernoulli-Kette handelt, gilt für den Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = n \cdot p = 80 \cdot 0{,}48 = 38{,}4$$

- Da die Alternativhypothese von einer größeren Gewinnwahrscheinlichkeit ausgeht, ist es sinnvoll, den Ablehnungsbereich für einen einseitigen (rechtsseitigen) Test zu berechnen.

  Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt 5 %, d. h. $P(K+1 \le X \le 80) \le 0{,}05$, wobei K die kleinste ganze Zahl ist, für die diese Ungleichung erfüllt ist.
  Es soll also gelten:

$$P(K+1 \le X \le 80) = 1 - \sum_{i=0}^{K} \binom{80}{i} \cdot 0{,}48^i \cdot 0{,}52^{80-i} \le 0{,}05$$

$$\text{also } \sum_{i=0}^{K} \binom{80}{i} \cdot 0{,}48^i \cdot 0{,}52^{80-i} \ge 0{,}95$$

  Diese Ungleichung lässt sich mittels einer Tabellierung lösen:

K	44	45	46	47
$\sum_{i=0}^{K} \binom{80}{i} \cdot 0{,}48^i \cdot 0{,}52^{80-i} \approx$	0,914	0,944	0,965	0,979

  Für $K = 46$ ist die Ungleichung also erstmals erfüllt.
  Der Ablehnungsbereich ist somit [47; 80].

  Es müssen bei einer Tabellierung mindestens die grau unterlegten Werte dokumentiert werden, um die Erfüllung des Kriteriums "kleinste ganze Zahl" zu belegen.

  Andere Rechenwege, etwa über das Lösen einer Gleichung, sind möglich.

- Beim Fehler 1. Art wird die Nullhypothese verworfen, obwohl sie wahr ist. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler lässt sich mithilfe der obigen Tabellierung ermitteln: $P(47 \le X \le 80) \approx 1 - 0{,}965 = 3{,}5\%$

2	8	2

e)

- Beim Fehler 2. Art wird die Nullhypothese *nicht* verworfen, obwohl sie falsch ist. In diesem Sachzusammenhang bedeutet dies, dass der Spielautomat zu häufig Gewinne ausschüttet, man aber weiterhin davon ausgeht, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit 0,48 ist.
- Zu tabellieren sind die Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq 46)$ für verschiedene Werte der Erfolgswahrscheinlichkeit.

tatsächliche Gewinnwahrscheinlichkeit	Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art (Näherungswerte)
0,48	0,965
0,50	0,927
0,52	0,864
0,54	0,770
0,56	0,648
0,58	0,507
0,60	0,364
0,62	0,236
0,64	0,137
0,66	0,070
0,68	0,031
0,70	0,012

Die tatsächliche Gewinnwahrscheinlichkeit muss also sehr deutlich von 0,48 abweichen, um zu akzeptabel kleinen Werten für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art zu kommen.

Tabelle für die Ersatzlösung mit den Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq 47)$:

tatsächliche Gewinnwahrscheinlichkeit	Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art (Näherungswerte)
0,48	0,979
0,50	0,954
0,52	0,907
0,54	0,833
0,56	0,727
0,58	0,596
0,60	0,452
0,62	0,312
0,64	0,194
0,66	0,107
0,68	0,051
0,70	0,021

4 | 4

f)	A priori gilt $P(p=0{,}48)=P(p=0{,}50)=P(p=0{,}52)=\frac{1}{3}$ Die drei A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten berechnen sich dann mithilfe des Satzes von Bayes: $P(p=0{,}48 \mid X=38)$ $=\frac{\frac{1}{3}\cdot P(X=38 \mid p=0{,}48)}{\frac{1}{3}\cdot P(X=38 \mid p=0{,}48)+\frac{1}{3}\cdot P(X=38 \mid p=0{,}50)+\frac{1}{3}\cdot P(X=38 \mid p=0{,}52)}$ $=\frac{P(X=38 \mid p=0{,}48)}{P(X=38 \mid p=0{,}48)+P(X=38p=0{,}50)+P(X=38 \mid p=0{,}52)}$ $\approx \underline{\underline{0{,}380}}$ bzw. $P(p=0{,}50 \mid X=38)$ $=\frac{P(X=38 \mid p=0{,}50)}{P(X=38 \mid p=0{,}48)+P(X=38p=0{,}50)+P(X=38 \mid p=0{,}52)}$ $\approx \underline{\underline{0{,}345}}$ bzw. $P(p=0{,}52 \mid X=38)$ $=\frac{P(X=38 \mid p=0{,}52)}{P(X=38 \mid p=0{,}48)+P(X=38p=0{,}50)+P(X=38 \mid p=0{,}52)}$ $\approx \underline{\underline{0{,}276}}$		2	4
	Insgesamt 50 BWE	13	25	12