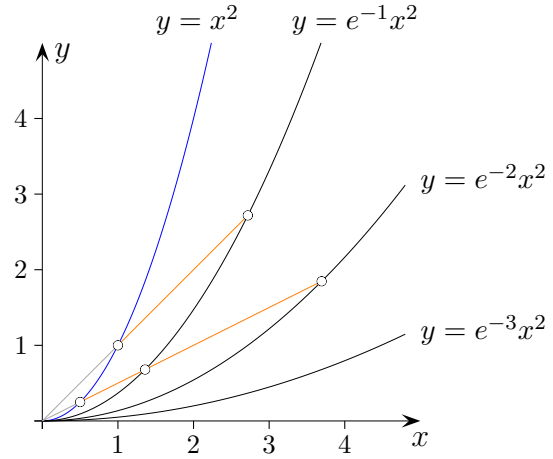
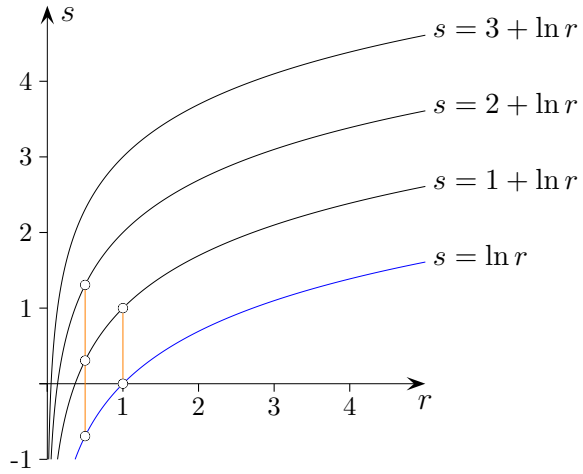
1. Differenzialgleichung, Lie-Transformation
2. DGL transformieren
3. Funktionen transformieren
4. Variablentransformation, kanonische Variablen
5. Charakteristiken-Methode
6. Symmetrie-Bedingung
7. $y' = x + y$
8. Linearisierte Symmetrie-Bedingung
9. $y' = \frac{y}{x} + x$
10. $y' = \frac{e^x}{y} + y$
11. Lie-Transformation mit kanonischen Variablen ermitteln
12. Infinitesimale Transformation
13. $\mathbf{X}$ in kanonischen Variablen
14. Polarkoordinaten
15. Differenzialgleichungen zweiter Ordnung $y'' = \Omega(x, y, y')$
16. Symmetrie-Bedingung für $y'' = \Omega(x, y, y')$
17. Transformations-Gruppe zur infinitesimalen Transformation
18. Differenzialoperator $\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'}$
19. Exponentialdarstellung von Γ_λ
20. Rekonstruktion von Γ_λ Beispiel
21. Lie‘s integrierender Faktor
22. Lie‘s integrierender Faktor Beispiel
23. Idee von $\mathbf{X}F = 1$
24. μ, ν integrierende Faktoren, $F(x, y) = \frac{\mu}{\nu}$

25. Lie-Klammer
26. Jacobi-Identität
27. Kriterium für eine Lie-Gruppe einer Differenzialgleichung
28. Infinitesimale Transformation aus zweien erzeugen

↑ Differenzialgleichung, Lie-Transformation



Wir betrachten die Kurvenschar $y = cx^2$, $x > 0$, $c > 0$.
Eine Differenzialgleichung mit dieser Lösungsschar lautet $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$.
Das ist unmittelbar zu sehen.



Mit der Variablentransformation (Rechnung folgt)

$$r = \frac{y}{x}$$
$$s = \ln x$$

geht die DGL $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ in $\frac{ds}{dr} = \frac{1}{r}$ über.

Die Lösungfunktionen sind $s = \ln r + C$.

Im x, y-Koordinatensystem sind das die Parabeln $y = cx^2$.
Nachweise finden sich auf den nächsten Seiten.

Um eine Differenzialgleichung der Form $\frac{dy}{dx} = \Omega(x, y)$ zu lösen, ist eine Variablentransformation erforderlich, so dass die DGL in $\frac{ds}{dr} = \Omega(r)$ übergeht. Diese ist leicht zu integrieren, da die rechte Seite nur von einer Variablen abhängig ist.

Die Funktionen $y = cx^2$ können durch Transformationen der Ebene (Grafik mit $\lambda = 1$)

$$\Gamma_\lambda\colon\ (x, y) \longrightarrow (e^\lambda x, e^\lambda y)$$

ineinander überführt werden. Für $s = \ln r + C$ sind es Translationen $(x, y) \longrightarrow (x, y + \lambda)$.

Sophus Lie erkannte um 1870, dass eine Variablentransformation mit einer Transformation wie Γ_λ und Γ_λ mit der Differenzialgleichung (ohne die Lösungsschar $y = cx^2$) ermittelt werden können. Seine umfangreiche Theorie kann auf partielle Differenzialgleichungen angewandt werden.

↑ DGL transformieren

Mit der Variablentransformation

$$\begin{aligned} r &= \frac{y}{x} & \Longrightarrow \quad y = x \cdot r \qquad (1) \\ s &= \ln x & \Longrightarrow \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{x} \qquad (2) \end{aligned}$$

geht die DGL $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$ in $\frac{ds}{dr} = \frac{1}{r}$ über.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &\overset{(1)}{=} r + x \cdot \frac{dr}{dx} \\ &= r + x \cdot \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dx} \\ &\overset{(2)}{=} r + \frac{dr}{ds} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2r \qquad \text{siehe DGL} \\ &\Longrightarrow \quad 2r = r + \frac{dr}{ds} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{ds}{dr} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

alternativ

DGL $\frac{dy}{dx} = \Omega(x, y)$ Variablentransformation

$$\begin{aligned} r &= r(x, y) \\ s &= s(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dr} &= \frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{dr}{dx}} = \frac{s_x\, dx + s_y\, dy}{r_x\, dx + r_y\, dy} \qquad \text{Differenzial für Funktionen mit 2 Variablen im Zähler und Nenner} \\ &= \frac{(s_x + s_y \frac{dy}{dx})\, dx}{(r_x + r_y \frac{dy}{dx})\, dx} \\ &= \frac{s_x + \Omega(x,y)\, s_y}{r_x + \Omega(x,y)\, r_y} \end{aligned}$$

Die rechte Seite kann mit $(x, y) \longrightarrow (r, s)$ als Funktion von r und s geschrieben werden.
Das ergibt (nach längerer Rechnung, CAS empfehlenswert) die DGL $\frac{ds}{dr} = \Omega(r)$.

↑ Funktionen transformieren

Mit der Variablentransformation

$$\begin{aligned} r &= \frac{y}{x} \\ s &= \ln x \end{aligned}$$

und der Rücktransformation

$$\begin{aligned} x &= e^s \\ y &= r\,e^s \end{aligned}$$

geht $y = cx^2$ mit $c > 0$ in $s = \ln r + C$ über und umgekehrt.

$$\begin{aligned} y = cx^2 \quad \Longrightarrow \quad r\,e^s &= c\,e^{2s} \\ r &= c\,e^s \\ \ln r &= \ln c + s \\ s &= \ln r + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s = \ln r + C \quad \Longrightarrow \quad \ln x &= \ln y - \ln x + C \\ 2\ln x &= \ln y + C \qquad \mid e^{()} \\ x^2 &= e^{\ln y + C} \\ &= y\,e^C \\ y &= cx^2 \end{aligned}$$

Die Funktionsschar $y = cx^2$ mit $c > 0$ wird durch eine Transformation (λ beliebig)

Γ_λ: $(x, y) \longrightarrow (e^\lambda x, e^\lambda y)$

aufeinander abgebildet.

$$\begin{aligned} y = cx^2 \quad \Longrightarrow \quad (x, cx^2) &\longrightarrow (e^\lambda x, e^\lambda c x^2) \qquad \text{Parabel und Bild als Parameterkurven} \\ \overline{x} &= e^\lambda x \\ \overline{y} &= e^\lambda c x^2 \qquad x = \frac{\overline{x}}{e^\lambda} \text{ einsetzen} \\ \overline{y} &= \frac{c}{e^\lambda}\overline{x}^{\,2} \end{aligned}$$

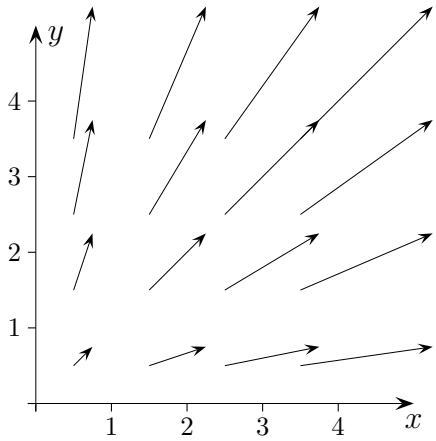
Aufgrund des Faktors e^λ ist Γ_0: $(x, y) \longrightarrow (x, y)$ die identische Transformation.

↑ Variablentransformation, kanonische Variablen

Mit Γ_λ: $(x,y) \longrightarrow (\overline{x},\overline{y}) = (e^\lambda x, e^\lambda y)$
kann die Variablentransformation (kanonische Variablen)

$$\begin{aligned} r &= \frac{y}{x} \\ s &= \ln x \end{aligned}$$

ermittelt werden.

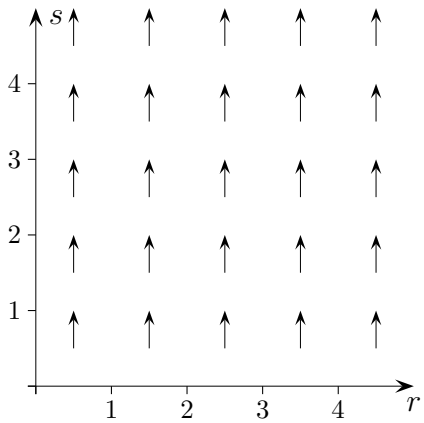


Durch Γ_λ (λ fest) geht $y = x^2$ in $y = c_1 x^2$ über, hierauf kann erneut Γ_λ angewandt werden, usw.
Im r,s-Koordinatensystem werden die Kurven in y-Achsenrichtung verschoben.
Für jeden Punkt (x_0, y_0) auf $y = x^2$ (und für alle weiteren) entsteht durch variiertes λ eine Bahnkurve $\lambda \longrightarrow (e^\lambda x_0, e^\lambda y_0)$.
Hier sind die Bahnen geradlinig (siehe Seite 1), im allgemeinen jedoch krummlinig. Für kleine λ-Werte erfasst für $\lambda = 0$ der Tangentialvektor

$$(x,y)^\top = (\xi(x,y), \eta(x,y))^\top$$

die Wirkung von Γ_λ.

$$\left.\frac{d\overline{x}}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \xi(x,y), \qquad \left.\frac{d\overline{y}}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \eta(x,y)$$



Die obere Grafik veranschaulicht das Vektorfeld der Tangentialvektoren $(x,y)^\top$ (die Länge der Vektoren wurde in beiden Grafiken halbiert).
Im r,s-Koordinatensystem erhalten wir für die Translationen $(x,y) \longrightarrow (x, y+\lambda)$ das Vektorfeld $(0,1)^\top$.

Überprüfen wir das.

$$\lambda \longrightarrow (\overline{x_0}, \overline{y_0}) = (e^\lambda x_0, e^\lambda y_0)$$

In r,s-Koordinaten:

$$\lambda \longrightarrow \left(\frac{y_0}{x_0}, \ln(e^\lambda x_0)\right) = \left(\frac{y_0}{x_0}, \lambda + \ln x_0\right), \qquad \left.\frac{d\,\frac{y_0}{x_0}}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0, \qquad \left.\frac{d\,(\lambda + \ln x_0)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = 1$$

Allgemein gilt mit $(\ ) = (x_0, y_0)$:

$$\lambda \longrightarrow (\overline{x}(\ ), \overline{y}(\ ))$$

In r,s-Koordinaten $r = r(x,y)$, $s = s(x,y)$:

$$\lambda \longrightarrow \Big(\underbrace{r(\overline{x}(\ ), \overline{y}(\ ))}_{\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0}, \underbrace{s(\overline{x}(\ ), \overline{y}(\ ))}_{\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = 1}\Big)$$

Mit der Kettenregel ergibt das:

$$\begin{aligned} r_x(\ )\xi(\ ) + r_y(\ )\eta(\ ) &= 0 \\ s_x(\ )\xi(\ ) + s_y(\ )\eta(\ ) &= 1 \end{aligned}$$

↑ Variablentransformation

$$
\begin{aligned}
r_x(\ )\xi(\ ) + r_y(\ )\eta(\ ) &= 0 \\
s_x(\ )\xi(\ ) + s_y(\ )\eta(\ ) &= 1
\end{aligned}
$$

Für das Beispiel:

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{y}{x} && \Longrightarrow r_x = -\frac{y}{x^2}, \quad r_y = \frac{1}{x} \\
s &= \ln x && \Longrightarrow s_x = \frac{1}{x}, \quad s_y = 0
\end{aligned}
$$

$$(\xi(x,y), \eta(x,y))^\top = (x,y)^\top$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{y}{x^2}\,x + \frac{1}{x}\,y &= 0 \\
\frac{1}{x}\,x &= 1
\end{aligned}
$$

Das war zu erwarten.

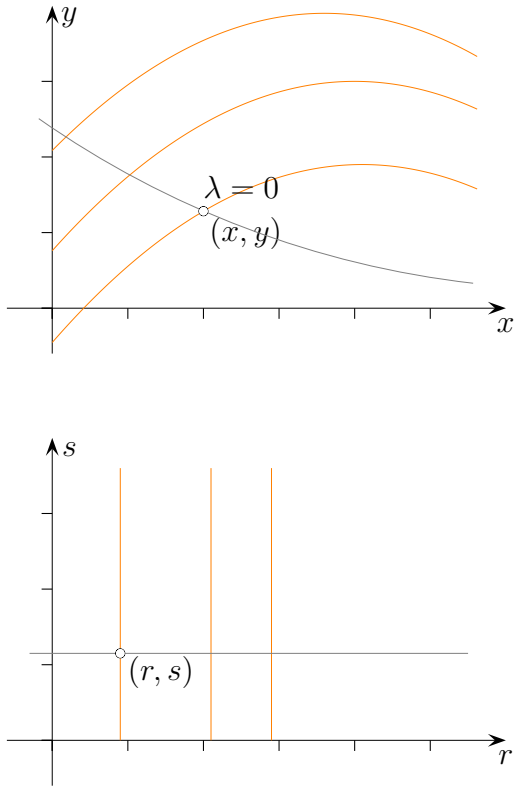
Bei gegebenem $\xi(x,y)$ und $\eta(x,y)$ können die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
r_x\xi + r_y\eta &= 0 \\
s_x\xi + s_y\eta &= 1
\end{aligned}
$$

dem Aufspüren und der Überprüfung einer Variablentransformation $r(x,y), s(x,y)$ dienen.

Wiederholte Anwendung von Γ_λ: $(x,y) \longrightarrow (e^\lambda x, e^\lambda y)$
liefert die Folge (x_0, y_0), $(e^\lambda x_0, e^\lambda y_0)$, $(e^{2\lambda} x_0, e^{2\lambda} y_0)$, $(e^{3\lambda} x_0, e^{3\lambda} y_0)$ ..., für die $r = \frac{y}{x}$ konstant ist.
Das ermöglicht eine Verschiebung in s-Achsenrichtung.
Nehmen wir an, dass $s = s(x)$ nur von x abhängig ist, so vereinfacht sich $s_x x + s_y y = 1$ zu $s_x x = 1$. $s = \ln x$ ist eine Lösung.

↑ Kanonische Variablen anschaulich



Die Bahnen von Γ_λ gehen bei der Variablentransformation
in Koordinatenlinien $r = const$ über. s ist dann eine Parametrisierung einer Bahn.

↑ Charakteristiken-Methode

$r(x,y)$ und $s(x,y)$ können aber auch aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} r_x x + r_y y &= 0 \\ s_x x + s_y y &= 1 \end{aligned}$$

ermittelt werden.

Die partielle Differenzialgleichung $r_x x + r_y y = 0$ vergleichen wir mit der Ableitung (beide Seiten) von $r\big((x(t),y(t)\big) = C$, also mit $r_x\dot{x} + r_y\dot{y} = 0$ (Methode der Charakteristiken).

Für (x,y) wird die Kurve $\big((x(t),y(t)\big)$ mit dem Parameter t (charakteristische Kurve, kurz Charakteristik) eingesetzt.

Übereinstimmung liegt vor, falls gilt:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) & &\Longrightarrow x(t) = c_1 e^t \\ \dot{y}(t) &= y(t) & &\Longrightarrow y(t) = c_2 e^t \\ & & &\Longrightarrow \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{c_2}{c_1} = c_3 \end{aligned}$$

Die Division sichert in diesem Fall die Konstanz $(= C)$, $r\big((x(t),y(t)\big) = \frac{y(t)}{x(t)}$.

$r(x,y) = \frac{y}{x}$ löst $r_x x + r_y y = 0$.

$s_x x + s_y y = 1$ vergleichen wir mit der Ableitung von $s\big((x(t),y(t)\big) = C$, also mit $s_x\dot{x} + s_y\dot{y} = 0$.

Übereinstimmung liegt vor, falls gilt:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) & x(t) &= e^t \quad \text{Diese Lösung nach } t \text{ auflösen} \\ \dot{y}(t) &= y(t) & y(t) &= e^t \quad \text{und in } s \text{ einsetzen.} \\ s_t &= 1 & s &= t \\ & & \Longrightarrow\ & s = \ln x \end{aligned}$$

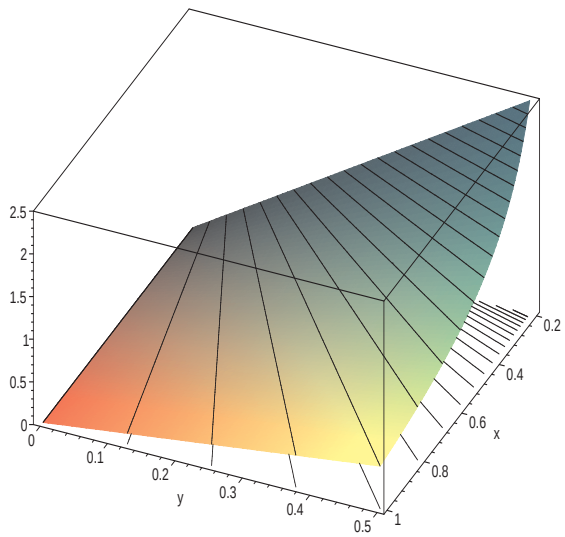
Nebenstehend ist der Graph von $r(x,y) = \frac{y}{x}$ abgebildet. Für jedes C legt $r\big((x(t),y(t)\big) = C$ einen Zusammenhang (Niveaulinie) von x und y in der xy-Ebene fest, $\frac{y}{x} = C$.
r ist also auf jeder Niveaulinie konstant.
Die Niveaulinien überdecken die xy-Ebene.
Wir leiten $t \longrightarrow r\big((x(t),y(t)\big) = C$ nach t ab

$$r_x\big((x(t),y(t)\big)x'(t) + r_y\big((x(t),y(t)\big)y'(t) = 0$$

und kehren zu den (x,y)-Koordinaten zurück

$$r_x x + r_y y = 0,$$

siehe Charakteristiken-Methode.



↑ Symmetrie-Bedingung

Die für die Berechnungen erforderlichen Eigenschaften der Transformationen (Lie-Gruppe)

Γ_λ: $(x,y) \longrightarrow (e^\lambda x, e^\lambda y)$ sind:

1) Γ_λ ist eine bijektive Abbildung der Ebene oder eines Bereichs.
2) Γ_0 ist die identische Abbildung.
3) $\Gamma_\lambda\big(\Gamma_\epsilon(x,y)\big) = \Gamma_{\lambda+\epsilon}(x,y)$
4) Die benötigten Ableitungen existieren.

Einer Differenzialgleichung der Form $\frac{dy}{dx} = \Omega(x,y)$ können derartige Transformationen

Γ_λ: $(x,y) \longrightarrow \big(\overline{x}(x,y), \overline{y}(x,y)\big)$

nicht unmittelbar abgelesen werden.

Die *Symmetrie-Bedingung* (die Transformationen Γ_λ werden auch Symmetrien genannt):

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \Omega(\overline{x},\overline{y})$$

stellt sicher, dass Γ_λ die Lösungsfunktionen aufeinander abbildet.

Falls diese Bedingung erfüllt ist, reicht eine Umbenennung der Variablen x, y in $\overline{x}, \overline{y}$ aus, um $\frac{dy}{dx} = \Omega(x,y)$ zu transformieren. $y = f(x)$ löst diese DGL genau dann, wenn $\overline{y} = f(\overline{x})$ $\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \Omega(\overline{x},\overline{y})$ löst. $\overline{y} = f(\overline{x})$, nun mit der Transformation $\overline{x}, \overline{y}$, löst dann $\frac{dy}{dx} = \Omega(x,y)$.

Die Symmetrie-Bedingung bedeutet, dass mit der Variablentransformation

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \overline{x}(x,y) \\ \overline{y} &= \overline{y}(x,y) \end{aligned}$$

gilt:

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{\overline{y}_x\,dx + \overline{y}_y\,dy}{\overline{x}_x\,dx + \overline{x}_y\,dy} \qquad \text{Vorgehen bekannt}$$

$$= \frac{(\overline{y}_x + \overline{y}_y \frac{dy}{dx})\,dx}{(\overline{x}_x + \overline{x}_y \frac{dy}{dx})\,dx}$$

$$= \frac{\overline{y}_x + \Omega(x,y)\overline{y}_y}{\overline{x}_x + \Omega(x,y)\overline{x}_y} = \Omega(\overline{x},\overline{y})$$

Im Beispiel:

$$\frac{\overline{y}_x + \Omega(x,y)\overline{y}_y}{\overline{x}_x + \Omega(x,y)\overline{x}_y} = \Omega(\overline{x},\overline{y}), \qquad (\overline{x},\overline{y}) = (e^\lambda x, e^\lambda y), \qquad \Omega(x,y) = \frac{2y}{x}$$

$$\frac{\frac{2y}{x}e^\lambda}{e^\lambda} = \frac{2e^\lambda y}{e^\lambda x} \qquad \overline{y}_x = \overline{x}_y = 0$$

$\uparrow\ y' = x + y$

Lie-Gruppe

Γ_λ: $(x, y) \longrightarrow (\overline{x}, \overline{y}) = (x - \lambda, y + \lambda)$

Symmetrie-Bedingung

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} &= \frac{\overline{y}_x + \Omega(x,y)\,\overline{y}_y}{\overline{x}_x + \Omega(x,y)\,\overline{x}_y} = \Omega(\overline{x}, \overline{y}), \qquad \Omega(x, y) = x + y \\
\frac{(x+y)\cdot 1}{1} &= (\overline{x} + 1) + (\overline{y} - 1) \\
\frac{(x+y)\cdot 1}{1} &= \overline{x} + \overline{y}
\end{aligned}$$

Variablentransformation, kanonische Variablen

$$\begin{aligned}
r &= x + y & r_x\xi + r_y\eta &= 0 & 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 &= 0, \quad \xi = -1,\ \eta = 1 \\
s &= y & s_x\xi + s_y\eta &= 1 & 1\cdot 1 &= 1
\end{aligned}$$

Mit der Charakteristiken-Methode erhalten wir:

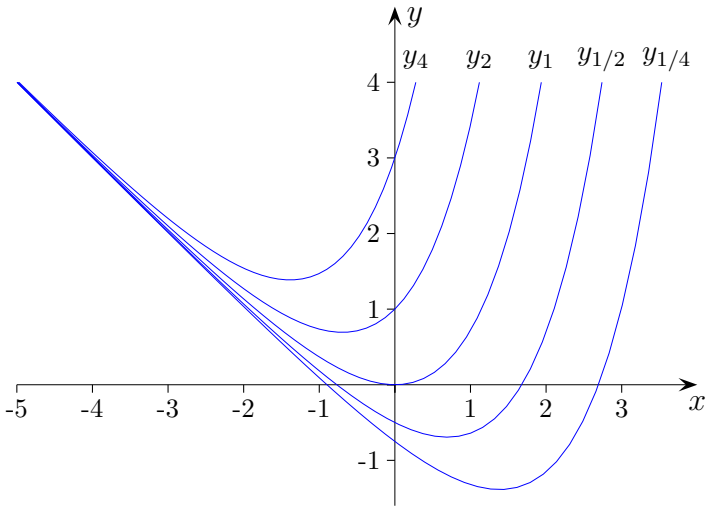
$$\begin{aligned}
x &= -t + C \\
y &= t & &\Longrightarrow & r &= x + y = C \\
s_t &= 1 & &\Longrightarrow & s &= t = y
\end{aligned}$$

DGL transformieren und integrieren

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dr} &= \frac{s_x + \Omega(x,y)\,s_y}{r_x + \Omega(x,y)\,r_y} = \frac{r}{1+r} = 1 - \frac{1}{1+r} \\
s &= r - \ln(1 + r) + C
\end{aligned}$$

Rücktransformation

$$\begin{aligned}
y &= x + y - \ln(1 + x + y) + C \\
\ln(1 + x + y) &= x + C \\
1 + x + y &= e^{x+C} \\
y_c &= ce^x - x - 1
\end{aligned}$$



$\uparrow$ $y' = x + y$ Ergänzung

Variablentransformation, kanonische Variablen

Mit der Charakteristiken-Methode erhalten wir alternativ:

$$\begin{aligned} x &= -t \\ y &= t + C \quad \Longrightarrow \quad r = x + y = C \\ s_t &= 1 \quad \Longrightarrow \quad s = t = -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= x + y \\ s &= -x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r_x\xi + r_y\eta &= 0 \\ s_x\xi + s_y\eta &= 1, \qquad \xi = -1,\ \eta = 1 \end{aligned}$$

DGL transformieren und integrieren

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + \Omega(x,y)\, s_y}{r_x + \Omega(x,y)\, r_y} = -\frac{1}{1+r}$$

$$s = -\ln(1+r) + C$$

Rücktransformation

$$\begin{aligned} -x &= -\ln(1 + x + y) + C \qquad |\cdot(-1)\ |e^{()} \\ e^{x+C} &= 1 + x + y \\ y &= ce^x - x - 1 \end{aligned}$$

↑ Linearisierte Symmetrie-Bedingung

Für eine Differenzialgleichung $\frac{dy}{dx} = \Omega(x,y)$ wird die kanonische Variablentransformation

$$\begin{aligned} r &= r(x,y) \\ s &= s(x,y) \end{aligned}$$

mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} r_x\xi + r_y\eta &= 0 \\ s_x\xi + s_y\eta &= 1 \end{aligned} \qquad \left.\frac{d\overline{x}}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \xi(x,y), \qquad \left.\frac{d\overline{y}}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \eta(x,y)$$

ermittelt.
Von der Lie-Gruppe Γ_λ wird also nur das Vektorfeld $(\xi(x,y),\eta(x,y))^\top$ benötigt, das lokal die Richtung der Transformationen Γ_λ angibt.
Diese Richtung muss durch die Einführung der Koordinaten (r,s) in eine zur y-Achse parallele Richtung geändert werden.

Mit der noch herzuleitenden linearisierten Form

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x)\Omega - \xi_y\Omega^2 = \xi\Omega_x + \eta\Omega_y$$

der Symmetrie-Bedingung $\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \Omega(\overline{x},\overline{y})$ werden zukünftig ξ und η ermittelt.

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x + d\lambda\,\xi(x,y) \\ \overline{y} &= y + d\lambda\,\eta(x,y) \end{aligned} \qquad d\lambda \text{ infinitesimal} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \overline{x}_x &= 1 + \lambda\xi_x \\ \overline{x}_y &= \lambda\xi_y \\ \overline{y}_x &= \lambda\eta_x \\ \overline{y}_y &= 1 + \lambda\eta_y \end{aligned}$$

Für $d\lambda$ schreiben wir einfacher λ.

$$\begin{aligned} \Omega(\overline{x},\overline{y}) &= \Omega(x,y) + \lambda\big(\Omega_x(x,y)\xi(x,y) + \Omega_y(x,y)\eta(x,y)\big) \\ &= \Omega + \lambda(\Omega_x\xi + \Omega_y\eta) \end{aligned}$$

Die Terme werden in die Symmetrie-Bedingung eingesetzt.

$$\begin{aligned} \Omega(\overline{x},\overline{y}) &= \frac{\overline{y}_x + \Omega(x,y)\overline{y}_y}{\overline{x}_x + \Omega(x,y)\overline{x}_y} \\ &= \frac{\Omega + \lambda(\eta_x + \Omega\eta_y)}{1 + \lambda(\xi_x + \Omega\xi_y)} \\ \Omega + \lambda(\Omega_x\xi + \Omega_y\eta) &= \frac{\Omega + \lambda(\eta_x + \Omega\eta_y)}{1 + \lambda(\xi_x + \Omega\xi_y)} \\ \big(\Omega + \lambda(\Omega_x\xi + \Omega_y\eta)\big)\big(1 + \lambda(\xi_x + \Omega\xi_y)\big) &= \Omega + \lambda(\eta_x + \Omega\eta_y) \\ &\ldots \qquad \lambda^2 \text{ bleibt unberücksichtigt} \\ \eta_x + (\eta_y - \xi_x)\Omega - \xi_y\Omega^2 &= \xi\Omega_x + \eta\Omega_y \end{aligned}$$

$$\uparrow\ y' = \frac{y}{x} + x$$

<u>linearisierte Symmetrie-Bedingung</u>

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x)\Omega - \xi_y\Omega^2 \;=\; \xi\,\Omega_x + \eta\,\Omega_y, \qquad \Omega(x,y) = \frac{y}{x} + x$$

Wir versuchen es mit den Annahmen $\xi = 0$ und $\eta = \eta(x)$.
Die Bedingung vereinfacht sich erheblich.

$$\begin{aligned}
\eta_x &= \eta\,\Omega_y \\
\eta_x &= \frac{\eta}{x} \\
\int \frac{d\eta}{\eta} &= \int \frac{dx}{x} \\
\ln\eta &= \ln x + C \\
\eta &= x, \qquad c = 1
\end{aligned}$$

<u>kanonische Variablen</u>

$$\begin{aligned}
r_x\xi + r_y\eta &= 0 \qquad & r_y x &= 0 \qquad & r &= x \\
s_x\xi + s_y\eta &= 1 \qquad & s_y x &= 1 \qquad & s &= \int \frac{dy}{x} = \frac{y}{x}
\end{aligned}$$

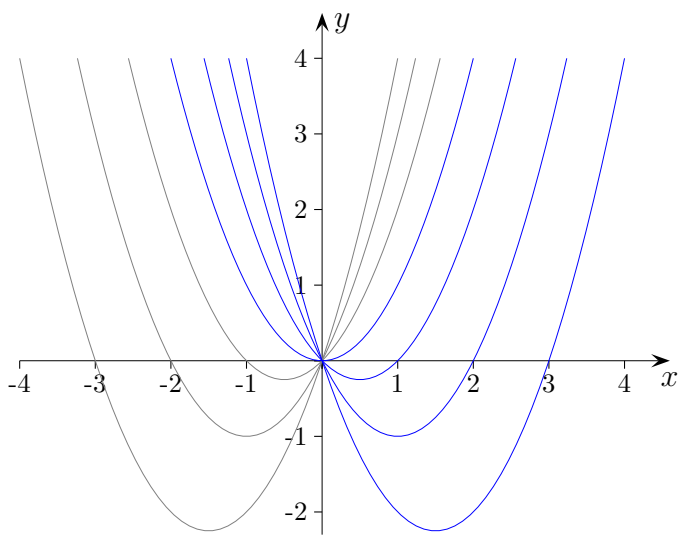
<u>DGL transformieren und integrieren</u>

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + \Omega(x,y)\,s_y}{r_x + \Omega(x,y)\,r_y} = \ldots = 1, \qquad s_x = -\frac{y}{x^2},\ \ s_y = \frac{1}{x}$$

$$s = r + k$$

<u>Rücktransformation</u>

$$\begin{aligned}
s &= r + k \\
\frac{y}{x} &= x + k \\
y &= x^2 + kx
\end{aligned}$$



$$\uparrow\ y' = \frac{e^x}{y} + y$$

Ansatz
$$\begin{aligned} \xi &= c_1 x + c_2 y + c_3 \\ \eta &= c_4 x + c_5 y + c_6 \end{aligned}$$

<u>linearisierte Symmetrie-Bedingung</u>

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x)\Omega - \xi_y \Omega^2 = \xi \Omega_x + \eta \Omega_y, \qquad \Omega(x,y) = \frac{e^x}{y} + y$$

$$c_4 + (c_5 - c_1)\Omega + c_2 \Omega^2 = (c_1 x + c_2 y + c_3)\Omega_x + (c_4 x + c_5 y + c_6)\Omega_y \qquad | \cdot y^2$$

$$-c_2 e^{2x} + c_4 x e^x + c_6 e^x + (2c_5 e^x - e^x c_1 x - c_1 e^x - e^x c_3) y + (c_4 - 3c_2 e^x - c_4 x - c_6) y^2 - c_1 y^3 - c_2 y^4 = 0$$

Die Terme wurden nach Potenzen von y geordnet.
Die Koeffizienten müssen null sein. Es folgt $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_6 = 0$.

Übrig bleibt:
$$\begin{aligned} \xi &= 1 \\ \eta &= \tfrac{1}{2} y \end{aligned}$$

<u>kanonische Variablen</u>

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 && \Longrightarrow x(t) = t && \Longrightarrow e^{x/2} = e^{t/2} \\ \dot{y} &= \tfrac{1}{2} y && \Longrightarrow y(t) = c e^{t/2} = c e^{x/2} \\ & && \Longrightarrow r = \frac{y}{e^{x/2}} = const \\ s_t &= 1 && \Longrightarrow s = t = x \end{aligned}$$

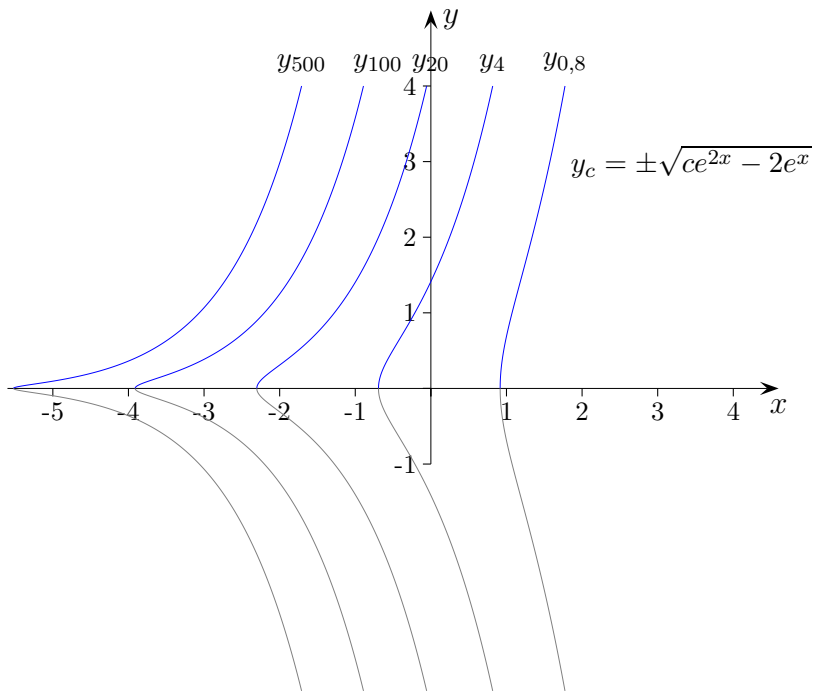
<u>DGL transformieren und integrieren</u>

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + \Omega(x,y)\, s_y}{r_x + \Omega(x,y)\, r_y} = \ldots = \frac{r}{\frac{r^2}{2} + 1}$$

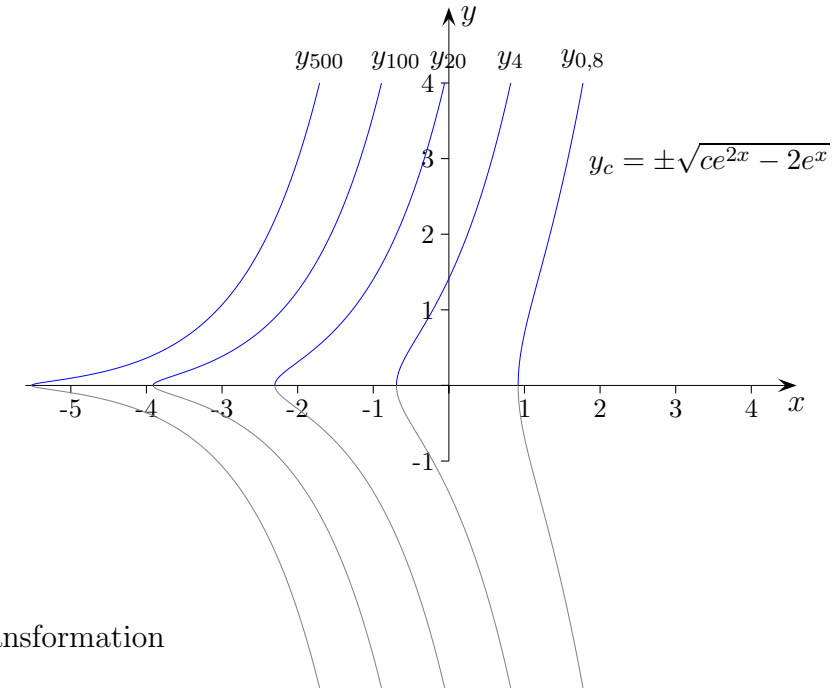
$$s = \ln\left(\frac{r^2}{2} + 1\right) + C$$

<u>Rücktransformation</u>

$$y_c = \pm\sqrt{c e^{2x} - 2e^x}$$



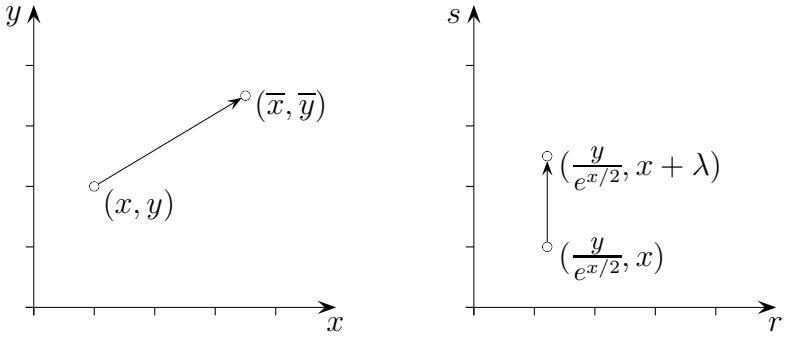
↑ Lie-Transformation mit kanonischen Variablen ermitteln



$y' = \dfrac{e^x}{y} + y$ wird mit der Variablentransformation

$$\begin{aligned} r &= \frac{y}{e^{x/2}} \qquad \Longrightarrow \qquad y = r \cdot e^{x/2} \\ s &= x \end{aligned}$$

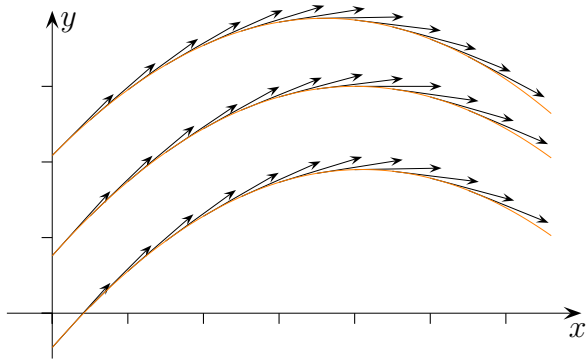
integriert. Wie lautet Γ_λ?



$$\begin{aligned} (\overline{x}, \overline{y}) &= (x + \lambda, r \cdot e^{(s+\lambda)/2}) && \text{Das Vorgehen kann den Abbildungen entnommen werden.} \\ &= (x + \lambda, r \cdot e^{s/2} \cdot e^{\lambda/2}) \\ &= (x + \lambda, y \cdot e^{\lambda/2}) && \text{Das Ergebnis ist plausibel, siehe Grafik.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{c_1 e^{2x} - 2e^x} && \text{Überprüfung} \\ y \cdot e^{\lambda/2} &= \pm\sqrt{c_1 e^{2(x+\lambda)} - 2e^{x+\lambda}} \\ &= \pm\sqrt{c_1 e^{2(x+\lambda)} - 2e^{x+\lambda}} \\ &= \pm e^{\lambda/2}\sqrt{c_1 e^{2x} e^{\lambda} - 2e^x} \\ y &= \pm\sqrt{c_2 e^{2x} - 2e^x}, && c_2 = c_1 e^{\lambda} \end{aligned}$$

↑ Infinitesimale Transformation



Die Transformationen Γ_λ: $(x,y) \longrightarrow (\overline{x},\overline{y})$

werden durch das Tangentialvektorfeld

$$(x,y)^\top = (\xi(x,y),\eta(x,y))^\top, \qquad \frac{d\overline{x}}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = \xi(x,y), \qquad \frac{d\overline{y}}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = \eta(x,y)$$

charakterisiert.

Mit den *infinitesimalen Transformationen*

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x + \lambda\xi(x,y) \qquad \lambda \text{ infinitesimal} \\ \overline{y} &= y + \lambda\eta(x,y) \end{aligned}$$

kann Γ_λ rekonstruiert werden.

Für das Vektorfeld $\xi(x,y),\eta(x,y))^\top$ führte Lie die *symbolische* Notation $\mathbf{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ ein. $\mathbf{X}$ ist ein Differenzialoperator und wird Generator von Γ_λ genannt, im Sinn von wiederherstellen. Mit der Operatoren-Schreibweise geht

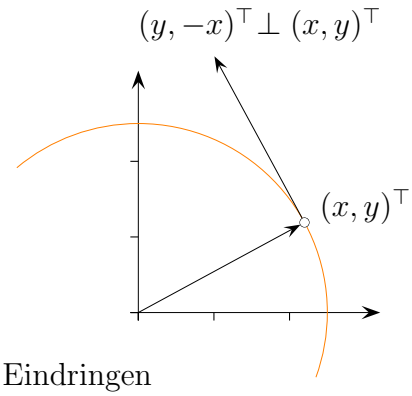
$$\begin{aligned} r_x(\ )\xi(\ ) + r_y(\ )\eta(\ ) &= 0 \qquad \text{in} \qquad \mathbf{X}(r(\ )) = 0 \quad \text{über.} \\ s_x(\ )\xi(\ ) + s_y(\ )\eta(\ ) &= 1 \qquad\qquad\quad \mathbf{X}(s(\ )) = 1 \end{aligned}$$

Z. B. erfährt $s(\ )$ wegen $\frac{ds(\overline{x},\overline{y})}{\lambda}\Big|_{\lambda=0} = \mathbf{X}(s(\ ))$ den Zuwachs $\mathbf{X}(s(\ ))\lambda = s_x(\ )\xi(\ )\lambda + s_y(\ )\eta(\ )\lambda$ bei Ausführung der infinitesimalen Transformation.

Für die Lie-Rotationsgruppe gilt:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x\cos\lambda + y\sin\lambda \\ \overline{y} &= x\cos\lambda - x\sin\lambda, \qquad (\xi(x,y),\eta(x,y))^\top = (y,-x)^\top \end{aligned}$$

$$\mathbf{X} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$



Das Sinnvolle dieser Schreibweise erschließt sich erst bei weiterem Eindringen in die Theorie. Die Generatoren bezeichnen Symmetrien, andererseits kann mit ihnen als Operatoren gerechnet werden.
Z. B. sind die Symmetrien $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$ vertauschbar, wenn $[\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2] = 0$ gilt, wobei $[\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2] := \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_2) - \mathbf{X}_2(\mathbf{X}_1)$ ist (Lie-Klammer).

$\uparrow$ $\mathbf{X}$ in kanonischen Variablen

Wie wirkt sich auf $\mathbf{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ ein Koordinatenwechsel nach r, s aus?

Sei $F(r,s)$ eine beliebige differenzierbare Funktion.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}F(r,s) &= \mathbf{X}F\big(r(x,y), s(x,y)\big) \\
&= \xi[r_x F_r + s_x F_s] + \eta[r_y F_r + s_y F_s] && \text{Definition von } \mathbf{X} \\
&= (\mathbf{X}r)F_r + (\mathbf{X}s)F_s && \mathbf{X}r = r_x\xi + r_y\eta = 0,\ \mathbf{X}s = s_x\xi + s_y\eta = 1 \\
&= \partial_s F \\
\mathbf{X} &= \partial_s && F \text{ beliebig}
\end{aligned}$$

In (r,s)-Koordinaten ist $(0,1)^\top$ der Tangentenvektor der Bahnen und daher ist $\mathbf{X} = \partial_s$.
Die Begriffsbildung des Generators ist somit konsistent.

Wie lautet $\mathbf{X} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ in Polarkoordinaten?

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2+y^2} \\
\varphi &= \arctan\frac{y}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}r &= \ldots = 0 && \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} \\
\mathbf{X}\varphi &= \ldots = 1 && \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

↑ Polarkoordinaten

Wie gelangt man vom Operator $\mathbf{X} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ zu den Polarkoordinaten $\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \arctan\frac{y}{x} \end{aligned}$?

Die kanonischen Variablen werden mit $\begin{aligned} -yr_x + xr_y &= 0 \\ -ys_x + xs_y &= 1 \end{aligned}$ ermittelt.

Charakteristiken-Methode

$-yr_x + xr_y = 0$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\Longrightarrow \ddot{x}(t) = -x(t) \\ &\Longrightarrow x(t) = C\cos t \\ &\qquad\ \ y(t) = C\sin t \\ &\Longrightarrow x^2+y^2 = C^2 \qquad\qquad \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \\ &\Longrightarrow f(x^2+y^2) = C^2 \\ &\qquad\ \ r = \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

$-ys_x + xs_y = 1$

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= 1 \\ s &= t \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\Longrightarrow x(s) = C\cos s \\ &\qquad\ \ y(s) = C\sin s \\ &\Longrightarrow \frac{y}{x} = \tan s \\ &\Longrightarrow s = \arctan\frac{y}{x} \end{aligned}$$

↑ Differenzialgleichungen zweiter Ordnung $y'' = \Omega(x, y, y')$

Die noch nachzuweisende *Symmetrie-Bedingung* für die Transformationen

Γ_λ: $(x, y) \longrightarrow \big(\overline{x}(x, y), \overline{y}(x, y)\big)$

lautet $\overline{y}'' = \Omega(\overline{x}, \overline{y}, \overline{y}')$ und in der linearisierten Form:

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y')y'' \\ -\xi\Omega_x - \eta\Omega_y - [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2]\Omega_{y'} = 0$$

Beispiel $y'' + e^{3y}y'^4 + y'^2 = 0$

<u>linearisierte Symmetrie-Bedingung</u>

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y')\underbrace{(-e^{3y}y'^4 - y'^2)}_{\Omega} \\ -\eta\underbrace{(-3e^{3y}y'^4)}_{\Omega_y} - [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2]\underbrace{(-4e^{3y}y'^3 - 2y')}_{\Omega_{y'}} = 0$$

Wir ordnen nach Potenzen von y' und erhalten ein Polynom 5. Grades,
dessen Koeffizienten gleich null gesetzt werden.

$$(\ )y'^0 + (\ )y'^1 + (\ )y'^2 + (\ )y'^3 + (\ )y'^4 + (\ )y'^5 = 0$$

Das ergibt die Gleichungen (vereinfacht, beachte z. B.: aus $\xi_x = 0$ folgt $\xi_{xx} = \xi_{yx} = \xi_{xy} = 0$):

$$\begin{array}{c|rcl} y'^0 & \eta_{xx} & = & 0 \\ y'^1 & \xi_{xx} & = & 0 \\ y'^2 & \eta_{yy} - 2\xi_{xy} + \eta_y & = & 0 \\ y'^3 & \eta_x & = & 0 \\ y'^4 & 3(\eta_y + \eta) - 2\xi_x & = & 0 \\ y'^5 & \xi_y & = & 0 \end{array}$$

$\eta_{xx} = 0$ (1. Gleichung) folgt aus der 4. Gleichung $\eta_x = 0$.
$\eta_{yy} - 2\xi_{xy} + \eta_y = 0$ (3. Gleichung) folgt aus der 5. Gleichung (nach y differenzieren und 6. Gleichung beachten).

Man überzeuge sich davon, dass $\xi = c_1 + 3c_2x$, $\eta = 2c_2 + c_3e^{-y}$ die (restlichen 4) Gleichungen löst.

$$\mathbf{X} = (1 + 3x)\frac{\partial}{\partial x} + (2 + e^{-y})\frac{\partial}{\partial y}$$

↑ Symmetrie-Bedingung für $y'' = \Omega(x, y, y')$

Wir wenden uns noch einmal der Symmetrie-Bedingung für $y' = \Omega(x, y)$ zu, um sie zu verallgemeinern. Symmetrien Γ_λ: $(x, y) \longrightarrow \big(\overline{x}(x, y), \overline{y}(x, y)\big)$ liegen vor, wenn $y' = \Omega(x, y)$ auf $\overline{y}' = \Omega(\overline{x}, \overline{y})$ bzw. $y'' = \Omega(x, y, y')$ auf $\overline{y}'' = \Omega(\overline{x}, \overline{y}, \overline{y}')$ transformiert werden. x und y werden gemäß

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x + \lambda\,\xi(x, y) \\ \overline{y} &= y + \lambda\,\eta(x, y) \end{aligned}$$

transformiert. Wie sieht es mit y' bzw. y'' aus?

Zunächst kann nur
$$\begin{aligned} \overline{y}' &= y' + \lambda\,\zeta_1 \\ \overline{y}'' &= y'' + \lambda\,\zeta_2 \end{aligned}$$

angenommen werden. ζ_1 und ζ_2 sind zu ermitteln.

$$\begin{aligned} \overline{y}' &= \frac{\overline{y}_x + y'\,\overline{y}_y}{\overline{x}_x + y'\,\overline{x}_y} && \text{siehe Symmetrie-Bedingung} \\ &= \frac{\mathbf{D}\overline{y}}{\mathbf{D}\overline{x}} && \text{abkürzend wird der Operator } \mathbf{D} = \partial_x + y'\partial_y \text{ verwendet} \\ &= \frac{y' + \lambda\mathbf{D}\eta}{1 + \lambda\mathbf{D}\xi} && \text{siehe } \overline{x},\ \overline{y} \\ &= y' + \lambda(\underbrace{\mathbf{D}\eta - y'\mathbf{D}\xi}_{\zeta_1}) && \text{Bruch wurde mit } 1 - \lambda\mathbf{D}\xi \text{ erweitert, Terme mit } \lambda^2 \text{ entfallen} \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \overline{y}'' &= \frac{\mathbf{D}\overline{y}'}{\mathbf{D}\overline{x}} \\ &= \frac{y'' + \lambda\mathbf{D}\zeta_1}{1 + \lambda\mathbf{D}\xi} && \text{siehe } \overline{y}' \\ &= y'' + \lambda(\underbrace{\mathbf{D}\zeta_1 - y''\mathbf{D}\xi}_{\zeta_2}) && \text{Bruch wurde mit } 1 - \lambda\mathbf{D}\xi \text{ erweitert, Terme mit } \lambda^2 \text{ entfallen} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2 \\ \zeta_2 &= \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y')y'' \end{aligned}$$

$\overline{y}'' = \Omega(\overline{x}, \overline{y}, \overline{y}')$ geht durch Ersetzen in $y'' + \lambda\,\zeta_2 = \Omega(x + \lambda\,\xi(x, y), y + \lambda\,\eta(x, y), y' + \lambda\,\zeta_1)$ über. Mit der Ableitung nach λ an der Stelle $\lambda = 0$ erhalten wir die linearisierte Symmetrie-Bedingung: $\zeta_2 = \xi\Omega_x + \eta\Omega_y + \zeta_1\Omega_{y'}$
Für $y' = \Omega(x, y)$ lautet sie $\zeta_1 = \xi\Omega_x + \eta\Omega_y$.

↑ Symmetrie-Bedingung Ergänzung

y''' wird gemäß

$$\overline{y}''' \;=\; y''' + \lambda(\underbrace{\mathbf{D}\zeta_2 - y'''\mathbf{D}\xi}_{\zeta_3})$$

$$\begin{aligned}\zeta_3 \;=\; \eta_{xxx} + (3\eta_{xxy} - \xi_{xxx})y' + 3(\eta_{xyy} - \xi_{xxy})y'^2 + (\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy})y'^3 \\ -\xi_{yyy}y'^4 + 3[\eta_{xy} - \xi_{xx} + (\eta_{yy} - 3\xi_{xy})y' - 2\xi_{yy}y'^2]y'' \\ -3\xi_y y''^2 + (\eta_y - 3\xi_x - 4\xi_y y')y'''\end{aligned}$$

transformiert.

Linearisierte Symmetrie-Bedingung für $y''' = \Omega(x, y, y', y'')$:

$$\zeta_3 = \xi\Omega_x + \eta\Omega_y + \zeta_1\Omega_{y'} + \zeta_2\Omega_{y''}$$

Eine Symmetrie Γ_λ: $(x, y) \longrightarrow \big(\overline{x}, \overline{y}\big)$ liegt genau dann vor, wenn jede Lösungskurve $y = f(x)$ der DGL $y'' = \Omega(x, y, y')$ in eine Kurve $\overline{y} = \overline{f}(\overline{x})$ übergeht, die $\overline{y}'' = \Omega(\overline{x}, \overline{y}, \overline{y}')$ erfüllt.

Hierbei werden im $\mathbb{R}^4$ den 4-Tupeln $(x, y, y', y'') = \big(x, f(x), f'(x), f''(x)\big)$
die 4-Tupel $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{y}', \overline{y}'')$ gemäß

$$\begin{aligned}\overline{x} \;&=\; x + \lambda\,\xi(x, y) \\ \overline{y} \;&=\; y + \lambda\,\eta(x, y) \\ \overline{y}' \;&=\; y' + \lambda\,\zeta_1 \\ \overline{y}'' \;&=\; y'' + \lambda\,\zeta_2\end{aligned}$$

zugeordnet.

↑ Transformations-Gruppe zur infinitesimalen Transformation

Zur infinitesimalen Transformation $\begin{aligned} \overline{x} &= x + \lambda x^2 \\ \overline{y} &= y + \lambda xy \end{aligned}$ bzw. zum Operator $\mathbf{X} = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}$

ist die Transformations-Gruppe gesucht.

Es muss gelten:

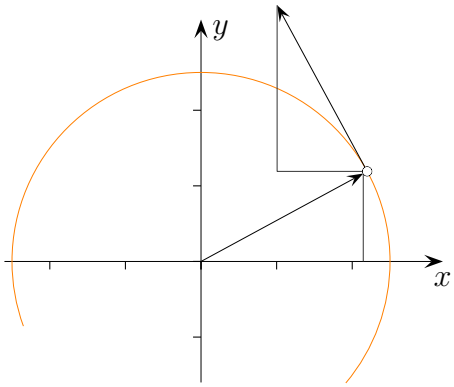
$$\begin{aligned} \frac{d\overline{x}}{d\lambda} &= \overline{x}^2, \qquad \overline{x}\big|_{\lambda=0} = x \\ \frac{d\overline{y}}{d\lambda} &= \overline{x}\,\overline{y}, \qquad \overline{y}\big|_{\lambda=0} = y \end{aligned}$$

Für dieses System kann leicht $\overline{x} = -\frac{1}{\lambda + c_1}$, $\overline{y} = \frac{c_2}{\lambda + c_1}$ bestätigt werden.

Die Anfangsbedingungen liefern $c_1 = -1/x$, $c_2 = -y/x$.
Somit ergibt sich die Symmetrie-Gruppe (projektive Transformationsgruppe):

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{x}{1 - \lambda x} \\ \overline{y} &= \frac{y}{1 - \lambda x} \end{aligned}$$

↑ Differentialoperator $\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'}$



Um für einen Kreis den Zusammenhang von x, y, y' aufzudecken,
um also eine Differenzialgleichung für den Kreis aufzustellen, differenzieren wir implizit:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ 2x + 2y \cdot y' &= 0 \\ 2y \cdot y' &= -2x \\ y' &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

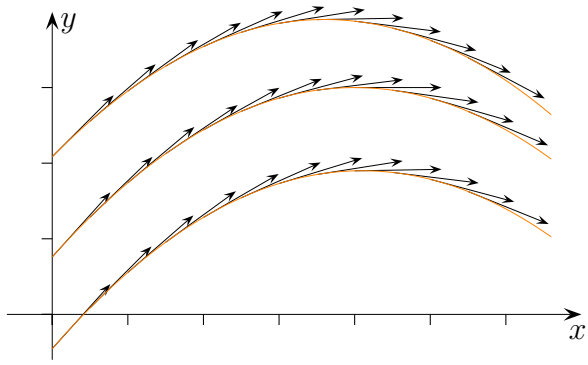
Anders formuliert:
Wir wenden auf beide Seiten von $x^2 + y^2 = r^2$ den Differenzialoperator $\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y}$ an.

Differenzialoperatoren dieser Art geben an, wie nach der Kettenregel implizit abzuleiten ist.

$$\begin{aligned} \left(y^2\right)' &= 2y \cdot y' \\ \left(y'^3\right)' &= 3\left(y'\right)^2 \cdot y'' \end{aligned}$$

Allgemein ermöglichen Differenzialoperatoren kompakte Schreibweisen.

↑ Exponentialdarstellung von Γ_λ



Die Transformationen Γ_λ: $(x,y) \longrightarrow (\overline{x},\overline{y})$

können mit dem Tangentialvektorfeld

$$(x,y)^\top = (\xi(x,y),\eta(x,y))^\top, \qquad \frac{d\overline{x}}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = \xi(x,y), \qquad \frac{d\overline{y}}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = \eta(x,y)$$

bzw. dem Operator $\mathbf{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ rekonstruiert werden.

Dazu betrachten wir die Taylor-Reihe der Funktion g: $\lambda \longrightarrow f(\overline{x},\overline{y})$.

$$g(\lambda) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}\lambda + \frac{g''(0)}{2!}\lambda^2 + \ \dots \ + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\lambda^n + \dots$$

$$f(\overline{x},\overline{y})\Big|_\lambda = f(\overline{x},\overline{y})\Big|_{\lambda=0} + \frac{\lambda}{1!}f'(\overline{x},\overline{y})\Big|_{\lambda=0} + \frac{\lambda^2}{2!}f''(\overline{x},\overline{y})\Big|_{\lambda=0} + \dots$$

$$\begin{aligned}
f'(\overline{x},\overline{y})\Big|_\lambda &= \xi(\overline{x},\overline{y})\frac{\partial f(\overline{x},\overline{y})}{\partial x}\Big|_\lambda + \eta(\overline{x},\overline{y})\frac{\partial f(\overline{x},\overline{y})}{\partial y}\Big|_\lambda \\
&= \mathbf{X}f(\overline{x},\overline{y}) && \text{Korrekter wäre } \overline{\mathbf{X}}\text{, jedoch gilt } \overline{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \text{ für } \lambda = 0. \\
f''(\overline{x},\overline{y})\Big|_\lambda &= \mathbf{X}(\mathbf{X}f(\overline{x},\overline{y})) && \text{erneute Ableitung, } \mathbf{X}f(\overline{x},\overline{y}) \text{ tritt an die Stelle von } f \\
f'''(\overline{x},\overline{y})\Big|_\lambda &= \mathbf{X}(\mathbf{X}(\mathbf{X}f(\overline{x},\overline{y}))) \\
f^{(n)}(\overline{x},\overline{y})\Big|_{\lambda=0} &= \underbrace{\mathbf{X}(\mathbf{X}(\dots(\mathbf{X}}_{n\text{-mal}}f(x,y)\dots)) = \mathbf{X}^n f(x,y) && \text{Für } \lambda = 0 \text{ geht } (\overline{x},\overline{y}) \text{ in } (x,y) \text{ über.} \\
& && \text{Mit } \mathbf{X}^n \text{ ist die } n\text{-malige Hintereinanderausführung gemeint.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(\overline{x},\overline{y})\Big|_\lambda &= f(x,y) + \frac{\lambda}{1!}\mathbf{X}f(x,y) + \frac{\lambda^2}{2!}\mathbf{X}^2 f(x,y) + \dots \\
&= e^{\lambda\mathbf{X}}f(x,y) && \text{symbolisch mit } \ e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= e^{\lambda\mathbf{X}}x && \text{für } \ f(\overline{x},\overline{y}) = \overline{x} \\
\overline{y} &= e^{\lambda\mathbf{X}}y
\end{aligned}$$

↑ Rekonstruktion von Γ_λ Beispiel

Ermittle Γ_λ zum Operator $\mathbf{X} = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= x + \tfrac{\lambda}{1!}\mathbf{X}x + \tfrac{\lambda^2}{2!}\mathbf{X}^2x + \tfrac{\lambda^3}{3!}\mathbf{X}^3x + \dots \\
\overline{y} &= y + \tfrac{\lambda}{1!}\mathbf{X}y + \tfrac{\lambda^2}{2!}\mathbf{X}^2y + \tfrac{\lambda^3}{3!}\mathbf{X}^3y + \dots
\end{aligned}$$

Offenbar gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}x &= -y & \mathbf{X}y &= x \\
\mathbf{X}(\mathbf{X}x) &= -x & \mathbf{X}(\mathbf{X}y) &= -y \\
\mathbf{X}(\mathbf{X}(\mathbf{X}x)) &= y & \mathbf{X}(\mathbf{X}(\mathbf{X}y)) &= -x \\
\mathbf{X}(\mathbf{X}(\mathbf{X}(\mathbf{X}x))) &= x & \mathbf{X}(\mathbf{X}(\mathbf{X}(\mathbf{X}y))) &= y
\end{aligned}$$

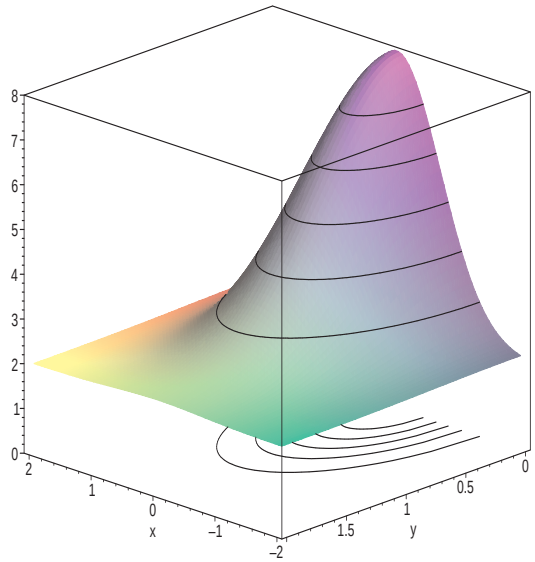
Die Gesetzmäßigkeit ist zu erkennen.

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= x - \tfrac{\lambda}{1!}y - \tfrac{\lambda^2}{2!}x + \tfrac{\lambda^3}{3!}y + \tfrac{\lambda^4}{4!}x - \dots \\
&= x\big(\underbrace{1 - \tfrac{\lambda^2}{2!} + \tfrac{\lambda^4}{4!} - \dots}_{\cos\lambda}\big) - y\big(\underbrace{\tfrac{\lambda}{1!} - \tfrac{\lambda^3}{3!} + \dots}_{\sin\lambda}\big) \\
\overline{y} &= y + \tfrac{\lambda}{1!}x - \tfrac{\lambda^2}{2!}y - \tfrac{\lambda^3}{3!}x + \tfrac{\lambda^4}{4!}y - \dots \\
&= x\big(\underbrace{\tfrac{\lambda}{1!} - \tfrac{\lambda^3}{3!} + \dots}_{\sin\lambda}\big) + y\big(\underbrace{1 - \tfrac{\lambda^2}{2!} + \tfrac{\lambda^4}{4!} - \dots}_{\cos\lambda}\big)
\end{aligned}$$

Wir erhalten erwartungsgemäß die Lie-Gruppe der Rotationen um den Ursprung.

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= x\cos\lambda - y\sin\lambda \\
\overline{y} &= x\sin\lambda + y\cos\lambda
\end{aligned}$$

↑ Lie‘s integrierender Faktor



Lie wies nach, dass für eine Differenzialgleichung

$$M(x,y) + N(x,y) \cdot y' = 0$$

(alternative Schreibweise: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, siehe exakte Differenzialgleichung)

mit einer Symmetrie $\mathbf{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$

$$\mu = \frac{1}{\xi M + \eta N} \quad \text{ein integrierender Faktor ist.}$$

Die Lösungskurven sind durch $F(x, y(x)) = C$ implizit gegeben.
Der Graph der Funkton $F(x,y)$ wird mit einer zur xy-Ebene parallelen Ebene geschnitten, die zu dieser einen Abstand C hat.
F kann durch $G(F(x,y))$ mit $h \longrightarrow G(h)$ ersetzt werden, die Lösungsschar bleibt gleich.
Zu einer Symmetrie, bei der also Lösungskurven in Lösungskurven transformiert werden, gibt es die Zuordnung $C \longrightarrow S_\lambda(C)$.

Lie leitete ein Gleichungssystem für F_x und F_y her:

$$\begin{aligned} NF_x - MF_y &= 0 \\ \xi F_x + \eta F_y &= 1 \qquad (= \mathbf{X}F) \end{aligned}$$

Die 1. Gleichung ist wegen $F_x = \nu M$ und $F_y = \nu N$ offensichtlich, ν integrierender Faktor.
Auf die nicht einfach einzusehende 2. Gleichung komme ich noch zurück.

Mit den Lösungen $F_x = \dfrac{M}{\xi M + \eta N}$ und $F_y = \dfrac{N}{\xi M + \eta N}$ erhalten wir den gesuchten Faktor.

$$\begin{aligned} dF &= F_x dx + F_y dy \\ &= \frac{M dx}{\xi M + \eta N} + \frac{N dy}{\xi M + \eta N} = \frac{M dx + N dy}{\xi M + \eta N} \end{aligned}$$

↑ Lie's integrierender Faktor Beispiel

$y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3}$, in Differenzialform $(x^2y + y^2)dx - x^3dy = 0$

Generator $\mathbf{X} = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$

integrierender Faktor
$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{\xi M + \eta N} \\ &= \frac{1}{x^2(x^2y+y^2) - x^4y} = \frac{1}{x^2y^2}\end{aligned}$$

$F(x,y) = \frac{x^2 - y}{xy}$ F wird als *erstes Integral* bezeichnet.

Probe $F_x(x,y) = \frac{x^2y+y^2}{x^2y^2} = \frac{x^2+y}{x^2y}$, $F_y(x,y) = -\frac{x^3}{x^2y^2} = -\frac{x}{y^2}$

$F(x,y) = C$ führt auf die Lösung $y = \frac{x^2}{1-Cx}$.

Beachte: $\mathbf{X}F = \xi F_x + \eta F_y = x^2\frac{x^2+y}{x^2y} - xy\frac{x}{y^2} = \ldots = 1$

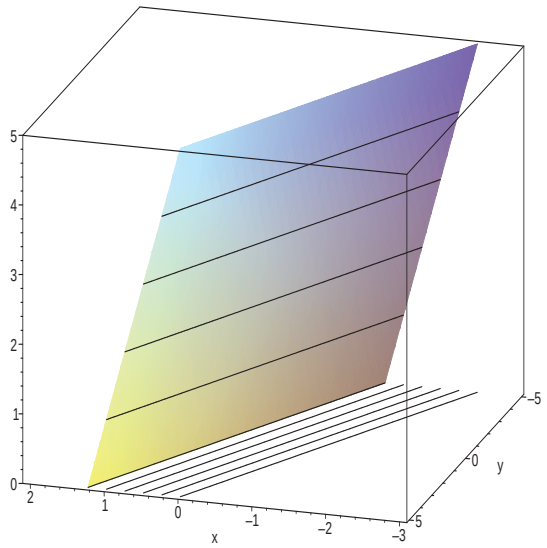
Bemerkenswert:

Mit einem weiteren Generator $\mathbf{X} = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}$

erhalten wir einen zweiten integrierenden Faktor
$$\begin{aligned}\nu &= \frac{1}{\xi M + \eta N} \\ &= \frac{1}{x(x^2y+y^2) - 2x^3y} = \frac{1}{xy(y-x^2)}\end{aligned}$$

und damit ohne Integration die Lösung:
$$\begin{aligned}\frac{\mu}{\nu} &= C \\ y - x^2 &= Cxy \\ y &= \frac{x^2}{1-Cx}\end{aligned}$$

↑ Idee von $\mathbf{X}F = 1$



DGL $-4dx + dy = 0$

$F(x,y) = y - 4x$

Probe $\qquad F_x(x,y) = -4, \qquad F_y(x,y) = 1$

Die Parallelenschar $F(x,y) = y - 4x = C$
wird durch die Lie-Gruppe der Translationen der Ebene

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x + a\lambda \\ \overline{y} &= y + b\lambda \end{aligned}$$

aufeinander abgebildet.

Eine Gerade $y - 4x = C_1$ geht über in

$$\begin{aligned} \overline{y} - b\lambda - 4(\overline{x} - a\lambda) &= C_1 \\ \overline{y} - 4\overline{x} &= C_1 + b\lambda - 4a\lambda \\ F(\overline{x}, \overline{y}) &= F(x,y) + \lambda(b - 4a) \end{aligned}$$

Für die infinitesimale Transformation mit $\mathbf{X} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$
gilt (siehe Exponentialdarstellung von Γ_λ):

$$F(\overline{x}, \overline{y}) = F(x,y) + \lambda \mathbf{X}F(x,y) \qquad \lambda \text{ klein und fest}$$

Da für gleiche Lösungsscharen eine Funktion G existiert mit $F(\overline{x}, \overline{y}) = G(F(x,y))$,
muss auch $\mathbf{X}F(x,y)$ abhängig von F sein, d. h. es existiert eine Funktion $h \longrightarrow K(h)$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{X}F(x,y) &= K(F(x,y)) \\ a\frac{\partial F}{\partial x} + b\frac{\partial F}{\partial y} &= K(F(x,y)) \end{aligned}$$

Für das Beispiel gilt: $\qquad \mathbf{X}F(x,y) = b - 4a$

$$a\frac{\partial F^*}{\partial x} + b\frac{\partial F^*}{\partial y} = 1 \qquad \text{für} \quad F^*(x,y) = \frac{1}{b-4a}F(x,y) \qquad \text{und allgemein mit}$$

$$G(h) = \int \frac{dh}{K(h)}: \quad \mathbf{X}F^*(x,y) = \mathbf{X}G(F(x,y)) = \frac{\partial G}{\partial h}\Big|_{h=F(x,y)} \cdot \mathbf{X}F = \frac{1}{K(F(x,y))} \cdot K(F(x,y)) = 1$$

Die 1. Gleichung des Gleichungssystems lautet nun $NF_x^* - MF_y^* = 0$.

Wegen des Quotienten in der vorletzten Zeile muss $\mathbf{X}F(x,y) = K(F(x,y)) \neq 0$ sein.

$\left.\frac{dF(\overline{x},\overline{y})}{\lambda}\right|_{\lambda=0} = \mathbf{X}(F(\ )) = 0$ bedeutet, dass der Zuwachs $\mathbf{X}(F(\ ))\lambda = F_x(\ )\xi(\ )\lambda + F_y(\ )\eta(\ )\lambda$
bei Ausführung der infinitesimalen Transformation gleich null ist und somit
Punkte in Punkte derselben Lösungskurve übergehen, die Lösungskurven also invariant sind.

Wegen
$$\begin{aligned} M(x,y)dx + N(x,y)dy &= 0 \\ M(x,y) + N(x,y)\cdot y' &= 0 \\ y' &= -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \end{aligned}$$

sind die Vektoren $(\xi,\eta)^\top$ und $(N,M)^\top$ kollinear.

Es ist plausibel, dass diese *trivialen* Transformationen nichts zur Lösung beitragen.

Zwei Gleichungen $F(x,y) = C$ und $K(x,y) = C$ stellen genau dann dieselbe Kurvenschar dar, wenn K eine Funktion von F ist: $K(x,y) = G(F(x,y))$

Die Kurvenschar $F(x,y) = C$ ist genau dann unter der Gruppe $\mathbf{X}$ invariant,
wenn $\mathbf{X}F = G(F)$ ist, $\mathbf{X}F$ also eine Funktion von F ist.
Insbesondere bleibt jede Kurve der Schar einzeln bei allen Transformationen der Gruppe invariant, wenn $\mathbf{X}F = 0$ ist.

Zum Nachweis der Umkehrung ziehen wir
$$F(\overline{x},\overline{y}) = F(x,y) + \frac{\lambda}{1!}\mathbf{X}F(x,y) + \frac{\lambda^2}{2!}\mathbf{X}^2F(x,y) + \frac{\lambda^3}{3!}\mathbf{X}^3F(x,y) + \ldots$$
heran.

Mit $\mathbf{X}F = G(F)$ folgt, dass $\mathbf{X}^2F = \mathbf{X}\mathbf{X}(F) = \mathbf{X}G(F) = \frac{dG(F)}{dF}G(F)$ eine Funktion von F ist, desgleichen $\mathbf{X}^3F$ usw. und somit die rechte Seite.

↑ μ, ν integrierende Faktoren, $F(x,y) = \frac{\mu}{\nu}$

$$\begin{aligned} NF_x - MF_y &= 0 \\ NF_x &= MF_y \\ \frac{F_x}{F_y} &= \frac{M}{N} \quad \Longleftrightarrow \quad Mh = F_x \text{ und } Nh = F_y \end{aligned}$$

Aus $NF_x - MF_y = 0$ folgt $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \Longleftrightarrow F_x dx + F_y dy = 0$.
Die Umkehrung wurde schon als richtig erkannt.

Seien nun μ und ν integrierende Faktoren.

$$\underbrace{\mu M(x,y)}_{F_x}\, dx + \underbrace{\mu N(x,y)}_{F_y}\, dy = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x} \qquad F_{yx} = F_{xy}$$

$$\underbrace{\nu M(x,y)}_{F_x}\, dx + \underbrace{\nu N(x,y)}_{F_y}\, dy = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \nu M}{\partial y} = \frac{\partial \nu N}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu M}{\partial y} &= \frac{\partial \mu N}{\partial x} \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \qquad | : \mu \qquad \text{Produktregel} \\ \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{M}{\mu} + \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{N}{\mu} + \frac{\partial N}{\partial x} \\ M \frac{\partial \lg \mu}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial y} &= N \frac{\partial \lg \mu}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x} \qquad * \end{aligned}$$

Aus $\frac{\partial \nu M}{\partial y} = \frac{\partial \nu N}{\partial x}$ folgt in analoger Weise $\quad M \frac{\partial \lg \nu}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \lg \nu}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad **$

Wir subtrahieren (linke und rechte Seiten) $**$ von $*$, fassen mit $\lg \frac{\mu}{\nu} = \lg \mu - \lg \nu$ zusammen und erhalten

$$M \frac{\partial}{\partial y} \lg \frac{\mu}{\nu} = N \frac{\partial}{\partial x} \lg \frac{\mu}{\nu}.$$

Somit ist $\lg \frac{\mu}{\nu}$ und dann auch $\frac{\mu}{\nu}$ ein Integral der DGL $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

Damit $\frac{\mu}{\nu}$ nicht konstant ist, muss noch die lineare Unabhängigkeit
von μ und ν vorausgesetzt werden.

↑ Lie-Klammer

Zur Herleitung eines für die weitere Entwicklung wichtigen Sachverhalts bedarf es einiger Vorbereitungen. Dazu sehen wir uns die Verkettung zweier Differenzialoperatoren und die Lie-Klammer an. Zum besseren Verständnis wende man die Operatoren auf f an.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1 &= \xi_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_1(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \\
\mathbf{X}_2 &= \xi_2(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 &= \mathbf{X}_1\xi_2\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{X}_1\eta_2\frac{\partial}{\partial y} + \xi_1\xi_2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \xi_1\xi_2\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 &= \mathbf{X}_2\xi_1\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{X}_2\eta_1\frac{\partial}{\partial y} + \xi_2\xi_1\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\xi_2\eta_1 + \eta_2\xi_1)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \xi_2\xi_1\frac{\partial^2}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] &= \mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2\mathbf{X}_1 \\
&= (\mathbf{X}_1\xi_2 - \mathbf{X}_2\xi_1)\frac{\partial}{\partial x} + (\mathbf{X}_1\eta_2 - \mathbf{X}_2\eta_1)\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

Im Operator $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1]$ fallen die zweiten partiellen Differentiationen heraus.
Die Lie-Klammer ist beachtenswerterweise vom gleichen Typ wie $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$.

Sie besitzt die Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] &= -[\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1] \\
[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1] &= 0 \\
[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \pm \mathbf{X}_3] &= [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] \pm [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3] \\
[\phi(x,y)\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] &= \phi(x,y)[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] - \mathbf{X}_2\phi(x,y)\mathbf{X}_1 \\
0 &= [\mathbf{X}_1, [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3]] + [\mathbf{X}_2, [\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_1]] + [\mathbf{X}_3, [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2]] \qquad \text{Jacobi-Identität}
\end{aligned}$$

Ein Vektorraum (hier der Raum der Operatoren) zusammen mit einer Lie-Klammer wird Lie-Algebra genannt.

↑ Jacobi-Identität

Die Formel

$$[\mathbf{X}_1,[\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3]]+[\mathbf{X}_2,[\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_1]]+[\mathbf{X}_3,[\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2]] \;=\; 0$$

wird für das Weitere benötigt und soll bewiesen werden.

Die Summanden werden mit $[\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_j]=\mathbf{X}_i\mathbf{X}_j-\mathbf{X}_j\mathbf{X}_i$ umgeformt.

$$\begin{aligned}
[\mathbf{X}_1,[\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3]] &= \mathbf{X}_1[\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3]-[\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3]\mathbf{X}_1\\
&= \mathbf{X}_1\big(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3-\mathbf{X}_3\mathbf{X}_2\big)-\big(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3-\mathbf{X}_3\mathbf{X}_2\big)\mathbf{X}_1\\
&= \underbrace{\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3}_{1}-\underbrace{\mathbf{X}_1\mathbf{X}_3\mathbf{X}_2}_{2}-\underbrace{\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3\mathbf{X}_1}_{3}+\underbrace{\mathbf{X}_3\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1}_{4}\\
[\mathbf{X}_2,[\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_1]] &= \underbrace{\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3\mathbf{X}_1}_{3}-\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_3-\mathbf{X}_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2+\underbrace{\mathbf{X}_1\mathbf{X}_3\mathbf{X}_2}_{2}\\
[\mathbf{X}_3,[\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2]] &= \mathbf{X}_3\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2-\underbrace{\mathbf{X}_3\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1}_{4}-\underbrace{\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3}_{1}+\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_3
\end{aligned}$$

Bei der Addition heben sich ersichtlich alle Terme paarweise auf.

Eine entsprechende Formel gilt in der Vektorrechnung, wenn für die Lie-Klammer
das Vektorprodukt genommen wird. Zum Beweis ist $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\,\vec{c})\,\vec{b}-(\vec{a}\,\vec{b})\,\vec{c}$ zu verwenden.

Die Jacobi-Identität bleibt offensichtlich auch für Dimensionen größer als 2 gültig.

Beispiel

$$\mathbf{X}_1=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z},\quad \mathbf{X}_2=x^2\frac{\partial}{\partial x},\quad \mathbf{X}_3=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}$$

$$[\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2]=x^2\frac{\partial}{\partial x},\quad [\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3]=-2x\frac{\partial}{\partial x},\quad [\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_1]=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}$$

Und weiter:

$$[\mathbf{X}_1,[\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3]]=-2x\frac{\partial}{\partial x},\quad [\mathbf{X}_2,[\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_1]]=0,\quad [\mathbf{X}_3,[\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2]]=2x\frac{\partial}{\partial x}$$

Die Summe der linken (rechten) Terme ist null.

↑ Kriterium für eine Lie-Gruppe einer Differenzialgleichung

Wir sahen, dass wenn $F(x,y) = C$ eine Lösung (ein erstes Integral) von $Mdx + Ndy = 0$ ist, dann ist F eine Lösung der partiellen DGL $\mathbf{A}F = N\dfrac{\partial F}{\partial x} - M\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0.$ $*$
Und weiter, wenn die Kurvenschar $F(x,y) = C$ durch eine nichttriviale Transformation $\mathbf{X}$ aufeinander abgebildet wird (die DGL bzw. die Lösungsschar ist unter der Gruppe invariant), dann gilt $\mathbf{X}F = G(F)$.

Betrachten wir nun die Lie-Klammer

$$[\mathbf{X},\mathbf{A}] \;=\; \mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{X} \;=\; (\mathbf{X}N - \mathbf{A}\xi)\frac{\partial}{\partial x} - (\mathbf{X}M + \mathbf{A}\eta)\frac{\partial}{\partial y}. \quad **$$

Wegen $\quad [\mathbf{X},\mathbf{A}]F = \mathbf{X}(\mathbf{A}F) - \mathbf{A}(\mathbf{X}F) = \mathbf{X}(0) - \mathbf{A}(G(F)) \;= 0 - \frac{dG}{dF}\mathbf{A}F = 0$

ist $\quad (\mathbf{X}N - \mathbf{A}\xi)\dfrac{\partial F}{\partial x} - (\mathbf{X}M + \mathbf{A}\eta)\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0.$

Mit $*$ folgt $\quad \dfrac{\mathbf{X}N - \mathbf{A}\xi}{N} = \dfrac{\mathbf{X}M + \mathbf{A}\eta}{M} = \lambda(x,y) \quad$ oder $\quad \mathbf{X}N - \mathbf{A}\xi = \lambda N, \;\; \mathbf{X}M + \mathbf{A}\eta = \lambda M.$

In $**$ eingesetzt ergibt die notwendige Bedingung: $\quad [\mathbf{X},\mathbf{A}] = \lambda(x,y)\mathbf{A}$

Sei umgekehrt $\quad [\mathbf{X},\mathbf{A}]F = \mathbf{X}(\mathbf{A}F) - \mathbf{A}(\mathbf{X}F) = \lambda(x,y)\mathbf{A}F = 0$

Mit $*$ folgt $\quad \mathbf{A}(\mathbf{X}F) = 0$

Mit der Lösung $\mathbf{X}F$ der DGL muss gelten $\mathbf{X}F = G(F)$
und somit ist die Lösungsschar $F(x,y) = C$ unter der Gruppe $\mathbf{X}$ invariant.

Die Differenzialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ ist genau dann unter der Gruppe $\mathbf{X}$ invariant, wenn $[\mathbf{X},\mathbf{A}] = \lambda(x,y)\mathbf{A}$ ist, $\mathbf{A} = N\dfrac{\partial}{\partial x} - M\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Beispiele

Wir betrachten die Schar der parallelen Geraden $x - y = C$
mit der Lie-Gruppe Γ_t der Ähnlichkeitstransformationen

$$\overline{x} = xe^t, \ \overline{y} = ye^t$$

und dessen Generator $\mathbf{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$. $\quad x - y = c$ geht über in $\overline{x} - \overline{y} = e^t c$.

Die Differenzialgleichung der Geradenschar lautet $-dx + dy = 0 \ \ (Mdx + Ndy = 0)$
und es ist $\mathbf{A} = N\frac{\partial}{\partial x} - M\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$.

$$[\mathbf{X}, \mathbf{A}] = (\mathbf{X}N - \mathbf{A}\xi)\frac{\partial}{\partial x} - (\mathbf{X}M + \mathbf{A}\eta)\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} = -\mathbf{A}, \ \lambda(x, y) = -1$$

Die Schar der Ursprungsgeraden $\frac{y}{x} = C$ bzw. die zugehörige Differenzialgleichung
$-ydx + xdy = 0$ $(Mdx + Ndy = 0)$ gestattet (lässt zu, übliche Sprechweisen) die Gruppe
der Rotationen mit dem Generator $\mathbf{X} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.

Mit $\mathbf{A} = N\frac{\partial}{\partial x} - M\frac{\partial}{\partial y} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ folgt:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{A}] = (\mathbf{X}N - \mathbf{A}\xi)\frac{\partial}{\partial x} - (\mathbf{X}M + \mathbf{A}\eta)\frac{\partial}{\partial y} = \big(-y - (-y)\big) - \big(-x + x\big) = 0, \ \lambda(x, y) = 0$$

Damit ist der Nachweis erbracht.

Ohne Beweis sei genannt:

Die lineare partielle DGL $\mathbf{A}f = N\frac{\partial f}{\partial x} + M\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ gestattet die infinitesimale Transformation $\mathbf{U}$ genau dann, wenn eine Relation der Form $[\mathbf{U}, \mathbf{A}] = \varrho(x, y)\mathbf{A}$ besteht.

Der Sachverhalt gilt auch für Dimensionen größer zwei.

↑ Infinitesimale Transformation aus zweien erzeugen

Nehmen wir an, die lineare partielle DGL $\mathbf{A}f = N\dfrac{\partial f}{\partial x} + M\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$
gestatte zwei infinitesimale Transformationen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$.

Dann gilt $\quad [\mathbf{U}, \mathbf{A}] = \varrho\mathbf{A}, \quad [\mathbf{V}, \mathbf{A}] = \sigma\mathbf{A}$
und in die Jacobi-Identität eingesetzt:

$$\begin{aligned}
[[\mathbf{U}, \mathbf{V}], \mathbf{A}] + [[\mathbf{V}, \mathbf{A}], \mathbf{U}] + [[\mathbf{A}, \mathbf{U}], \mathbf{V}] &= 0 \\
[[\mathbf{U}, \mathbf{V}], \mathbf{A}] + [\sigma\mathbf{A}, \mathbf{U}] + [-\varrho\mathbf{A}, \mathbf{V}] &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Mit} \quad [\sigma\mathbf{A}, \mathbf{U}] &= \sigma[\mathbf{A}, \mathbf{U}] - \mathbf{U}\sigma\mathbf{A} \\
[-\varrho\mathbf{A}, \mathbf{V}] &= -\varrho[\mathbf{A}, \mathbf{V}] + \mathbf{V}\varrho\mathbf{A}
\end{aligned}$$

entsteht die Identität:

$$\begin{aligned}
[[\mathbf{U}, \mathbf{V}], \mathbf{A}] &= -\sigma\underbrace{[\mathbf{A}, \mathbf{U}]}_{-\varrho\mathbf{A}} + \mathbf{U}\sigma\mathbf{A} + \varrho\underbrace{[\mathbf{A}, \mathbf{V}]}_{-\sigma\mathbf{A}} - \mathbf{V}\varrho\mathbf{A} \\
&= \mathbf{U}\sigma\mathbf{A} - \mathbf{V}\varrho\mathbf{A} \\
&= \underbrace{(\mathbf{U}\sigma - \mathbf{V}\varrho)}_{\tau(x,y)}\mathbf{A}
\end{aligned}$$

Mit $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ ist somit auch $[\mathbf{U}, \mathbf{V}]$ eine infinitesimale Transformation.

Gestattet die lineare partielle Differenzialgleichung $\mathbf{A}f = 0$ die beiden infinitesimalen Transformationen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$, so gestattet sie auch die infinitesimale Transformation $[\mathbf{U}, \mathbf{V}]$.

Dieses Vorgehen liefert jedoch nicht notwendig stets etwas Neues.

Mit $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ ist auch jede Linearkombination $a\mathbf{U} + b\mathbf{V}$ eine infinitesimale Transformation und überdies sogar $a\mathbf{U} + b\mathbf{V} + \lambda(x, y)\mathbf{A}$.

$$[a\mathbf{U} + b\mathbf{V} + \lambda(x, y)\mathbf{A}, \mathbf{A}] = \underbrace{(a\varrho + b\sigma - \mathbf{A}\lambda(x, y))}_{\varsigma(x,y)}\mathbf{A}$$

$$\begin{aligned}
\text{beachte} \qquad [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1] &= 0 \\
[\phi(x, y)\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] &= \phi(x, y)[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] - \mathbf{X}_2\phi(x, y)\mathbf{X}_1
\end{aligned}$$

Lie zeigte, dass jede zweidimensionale Lie-Algebra sich durch eine geeignete Wahl ihrer Basiselemente und geeigneter kanonischen Variablen auf einen von vier nicht ähnlichen Standardfälle transformieren lässt, um alle Gleichungen zweiter Ordnung $y'' = f(x, y, y')$ zu integrieren, die eine zweidimensionale Lie-Algebra zulassen.
(Nail H. Ibragimov, Differentialgleichungen und Mathematische Modellbildung)

↑