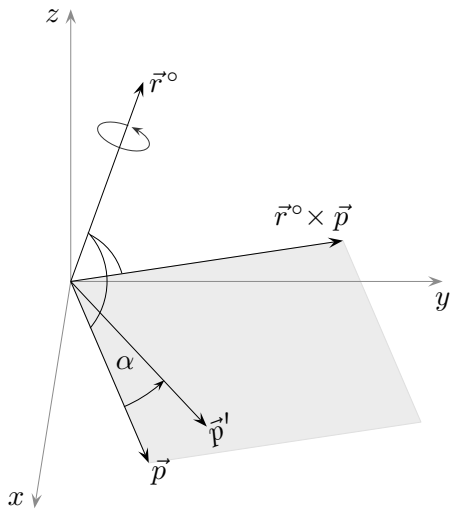
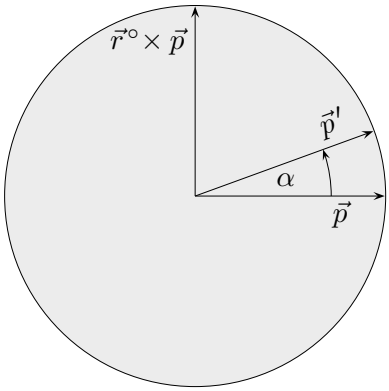
Quaternionen und Drehungen

Im Folgenden werden Drehungen im $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe des Kreuzproduktes beschrieben und der Bezug zu den Quaternionen hergestellt.
Der Zusammenhang von einer Verkettung von Drehungen und der Quaternionen-Multiplikation wird ersichtlich.

Die Drehachse möge durch den Ursprung verlaufen und durch einen Einheitsvektor $\vec{r}^{\circ}$ gegeben sein.
Die Länge 1 wird die Darstellung vereinfachen.



Zunächst betrachten wir den Fall, dass der Vektor $\vec{p}$,
der um den Winkel α gedreht werden soll, in der zu $\vec{r}^{\circ}$ senkrechten Ebene liegt.
In dieser Ebene liegen auch die mit $\vec{p}$ gleichlangen Vektoren $\vec{p}\,'$ und $\vec{r}^{\circ}\times\vec{p}$,
$|\,\vec{r}^{\circ}\times\vec{p}\,| = |\,\vec{r}^{\circ}\,||\,\vec{p}\,|\sin 90^{\circ} = |\,\vec{p}\,|$.



Für $\vec{p}\,'$ erhalten wir damit die Gleichung:

$$\vec{p}\,' = \cos\alpha\ \vec{p} + \sin\alpha\ \vec{r}^{\circ}\times\vec{p}$$

Im allgemeinen Fall ist ein Vektor $\vec{p} = \vec{q} + \lambda\vec{r}^{\circ}$ zu drehen,
wobei $\vec{q}$ in der zu $\vec{r}^{\circ}$ senkrechten Ebene liegt. Für $\vec{q}$ gilt daher,

$$\vec{p}\,' - \lambda\vec{r}^{\circ} = \underbrace{\cos\alpha\,(\vec{p} - \lambda\vec{r}^{\circ})}_{\cos\alpha\,\vec{p} - \cos\alpha\,\lambda\vec{r}^{\circ}} + \sin\alpha\ \underbrace{\vec{r}^{\circ}\times(\vec{p} - \lambda\vec{r}^{\circ})}_{\vec{r}^{\circ}\times\vec{p}} \qquad \text{beachte: } (\vec{p} - \lambda\vec{r}^{\circ})\,' = \vec{p}\,' - \lambda\vec{r}^{\circ}$$

Aus der Lage von $\vec{q}$ folgt $\vec{r}^{\circ}(\vec{p} - \lambda\vec{r}^{\circ}) = 0$, und damit $\lambda = \vec{r}^{\circ}\vec{p}$.
Einsetzen, Umstellen und Ausklammern liefert die Rodrigues-Formel (1840):

$$\vec{p}\,' = (\vec{r}^{\circ}\vec{p})[1 - \cos\alpha\,]\,\vec{r}^{\circ} + \cos\alpha\ \vec{p} + \sin\alpha\ \vec{r}^{\circ}\times\vec{p}$$

© Roolfs

Quaternionen und Drehungen

Die Quaternionen

$$\mathbb{A} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

wurden 1843 vom irischen Mathematiker W. Hamilton auf der vergeblichen Suche nach einer dreidimensionalen Erweiterung der komplexen Zahlen entdeckt. Hierfür war eine vierte Dimension unabdingbar. Zeitgleich entwickelte Grassmann eine derartige Verknüpfung. Die Multiplikation ist durch

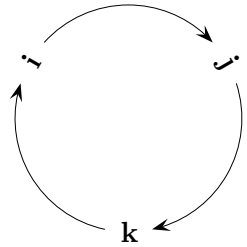
$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \qquad \text{(entspricht dem Kreuzprodukt)}$$

festgelegt. Die Kommutativität musste aufgegeben werden. Die übrigen Rechenregeln bleiben gültig.

Alternative Schreibweisen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa - yb - zc - wd \\ xb + ya + zd - wc \\ xc - yd + za + wb \\ xd + yc - zb + wa \end{pmatrix}$$



$$\mathbb{A} = [a, \vec{a}], \quad \mathbb{B} = [b, \vec{b}]$$

$$\mathbb{AB} = [ab - \vec{a}\cdot\vec{b},\ a\vec{b} + b\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}]$$

Durch die Aufteilung in einen skalaren und vektoriellen Teil wird der Bezug zum Skalar- und Vektorprodukt sichtbar.

Die Rodrigues-Formel kann in der Sprache der Quaternionen formuliert werden:

$$[0, \vec{p}\,'] = \mathbb{V}\,[0, \vec{p}]\,\mathbb{V}^*$$

$\vec{p}$ ist dem Quaternion $[0, \vec{p}]$ zugeordnet.
Ein Stern* kennzeichnet den konjugierten Vektor $\mathbb{A}^* = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$.
In $\mathbb{V}$ sind sowohl der Achsenvektor $\vec{r}^{\,\circ}$ als auch der Drehwinkel α enthalten.
Auch ist $|\mathbb{V}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 1$. Das Geheimnis soll gelüftet werden:

$$\mathbb{V} = [\cos\tfrac{\alpha}{2}, \sin\tfrac{\alpha}{2}\,\vec{r}^{\,\circ}]$$

$$\mathbb{V}^* = [\cos\tfrac{\alpha}{2}, -\sin\tfrac{\alpha}{2}\,\vec{r}^{\,\circ}] \qquad \text{Die Verwendung von } \tfrac{\alpha}{2} \text{ statt } \alpha \text{ wird gleich verständlich.}$$

$[0, \vec{p}\,'] = \mathbb{V}\,[0, \vec{p}]\,\mathbb{V}^*$ wird zunächst für $\vec{p} \perp \vec{r}^{\,\circ}$ durch (einfaches) Ausrechnen bestätigt.

$$[\cos\tfrac{\alpha}{2}, \sin\tfrac{\alpha}{2}\,\vec{r}^{\,\circ}]\,\underbrace{[0, \vec{p}][\cos\tfrac{\alpha}{2}, -\sin\tfrac{\alpha}{2}\,\vec{r}^{\,\circ}]}_{[0,\,\cos\frac{\alpha}{2}\vec{p} - \sin\frac{\alpha}{2}(\vec{p}\times\vec{r}^{\,\circ})]} = \ldots = [0, \vec{p}\,']$$

Benutzt wird: $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}, \quad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$\vec{p} \times \vec{r}^{\,\circ} = -\,\vec{r}^{\,\circ} \times \vec{p}, \quad \vec{r}^{\,\circ} \times (\vec{p} \times \vec{r}^{\,\circ}) = \vec{p}$

© Roolfs

Quaternionen und Drehungen

Es verbleibt, $[0, \vec{p}\,' + \lambda\vec{r}^{\circ}] = \mathbb{V}\,[0, \vec{p} + \lambda\vec{r}^{\circ}]\,\mathbb{V}^*$ nachzuweisen.
Aufgrund der Distributivität ist das gleichbedeutend mit $[0, \vec{r}^{\circ}] = \mathbb{V}\,[0, \vec{r}^{\circ}]\,\mathbb{V}^*$.

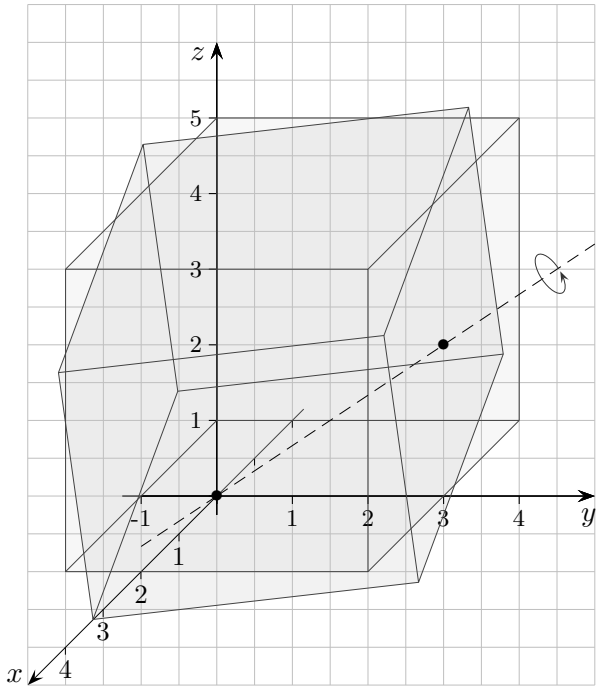
$$[\cos\tfrac{\alpha}{2}, \sin\tfrac{\alpha}{2}\,\vec{r}^{\circ}]\,\underbrace{[0, \vec{r}^{\circ}][\cos\tfrac{\alpha}{2}, -\sin\tfrac{\alpha}{2}\,\vec{r}^{\circ}]}_{[\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}\vec{r}^{\circ}]} = \ldots = [0, \vec{r}^{\circ}]$$

Benutzt wird: $(\sin\tfrac{\alpha}{2})^2 + (\cos\tfrac{\alpha}{2})^2 = 1$

Beispiel

$\vec{r}^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}, \quad \alpha = 20^{\circ}, \quad \cos\tfrac{\alpha}{2} = 0{,}9848, \quad \sin\tfrac{\alpha}{2} = 0{,}1736$

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \vec{p}_1{}' = \begin{pmatrix}2{,}449\\3{,}435\\3{,}347\end{pmatrix}$



Zusammengesetzte Drehung

Die Hintereinanderausführung von 2 Drehungen kann durch eine Drehung ersetzt werden.

$$\vec{p} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{V}\,[0,\vec{p}\,]\,\mathbb{V}^* \quad \longrightarrow \quad [0,\vec{p}\,'\,] = \mathbb{W}\mathbb{V}\,[0,\vec{p}\,]\,\mathbb{V}^*\,\mathbb{W}^*$$

Aufgrund von $\mathbb{V}^*\mathbb{W}^* = (\mathbb{W}\mathbb{V})^*$ können der Drehwinkel und die Achsenrichtung durch ein Quaternionenprodukt ermittelt werden.

Als Beispiel betrachten wir eine 90°-Drehung $\mathbb{R}_x$ um die x-Achse
gefolgt von einer 90°-Drehung $\mathbb{R}_z$ um die z-Achse.

$$\mathbb{R}_x = \cos\tfrac{\pi}{4} + \sin\tfrac{\pi}{4}\,\mathbf{i} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathbf{i})$$

$$\mathbb{R}_z = \cos\tfrac{\pi}{4} + \sin\tfrac{\pi}{4}\,\mathbf{k} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathbf{k})$$

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_z\mathbb{R}_x &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathbf{k})\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathbf{i}) = \tfrac{1}{2}(1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \\ &= \cos\tfrac{\pi}{3} + \sin\tfrac{\pi}{3}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\end{aligned}$$

$\mathbb{R}_z\mathbb{R}_x$ entspricht einer Drehung um $\frac{2}{3}\pi$ oder 120° um $\vec{r} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

© Roolfs

Quaternionenschiefkörper $\mathbb{H}$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$

$|\mathbb{A}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

$\mathbb{A}\mathbb{A}^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Bemerkenswert: $|\mathbb{A}\mathbb{B}| = |\mathbb{A}||\mathbb{B}|$

Beweis:

$$|\mathbb{A}||\mathbb{B}| = (\mathbb{A}\mathbb{A}^*)(\mathbb{B}\mathbb{B}^*) = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{B}^*)\mathbb{A}^* = (\mathbb{A}\mathbb{B})(\mathbb{B}^*\mathbb{A}^*) = (\mathbb{A}\mathbb{B})(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = |\mathbb{A}\mathbb{B}|$$

$\mathbb{B}\mathbb{B}^* \in \mathbb{R}$, daher vertauschbar

$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\mathbb{A}\mathbb{A}^*}\mathbb{A}^*$

Für $|\mathbb{A}| = 1$ (Einheitsquaternion) gilt damit $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^*$.

Vektoren können dividiert werden.

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \\ \mathbb{A}^* &= -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \\ \mathbb{A}^{-1} &= \frac{1}{9}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \\ \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} &= 1 \end{aligned}$$

Die Division von Vektoren beschäftigte Hamilton viele Jahre.
"Well, Papa, can you multiply triplets?" "No, I can only add and subtract them."

$$\mathbb{A} = [0, \vec{a}], \quad \mathbb{B} = [0, \vec{b}]$$

Die Frage war, wie muss das Produkt gewählt werden, damit bei gegebenem $\mathbb{A}\mathbb{B}$ und $\mathbb{A}$ der Faktor $\mathbb{B}$ eindeutig bestimmt ist, durch $\mathbb{A}$ also geteilt werden kann?

Die Antwort lautet:

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = [-\vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{a} \times \vec{b}]$$

Die Richtungsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ legen eine Ursprungsebene fest.
Wenn $\vec{a}$ gegeben ist, liegt $\vec{b}$ also in der Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{a} \times \vec{b}$ und schließt mit $\vec{a}$ einen bestimmten Winkel α ein. α ist in $\vec{a}\cdot\vec{b}$ verpackt. Somit sind 4-Tupel erforderlich.
Aus $[-\vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{a} \times \vec{b}]$ ergeben sich die Rechenregeln für $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

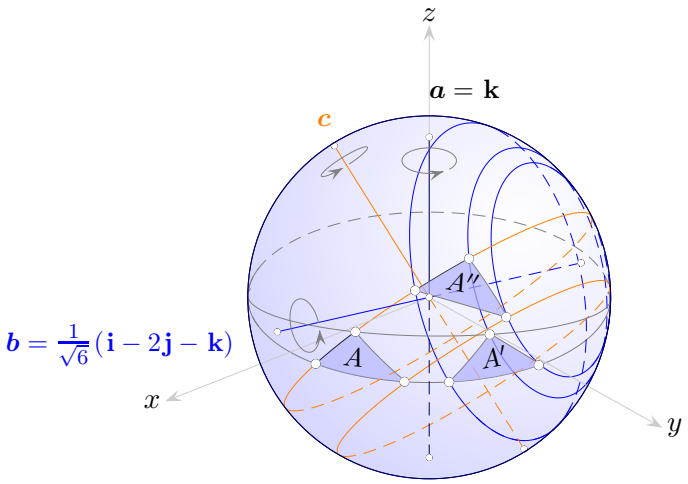
$[a, \vec{a}][1, \vec{0}] = [a, \vec{a}]$ legt die Verallgemeinerung

$$\mathbb{A} = [a, \vec{a}], \quad \mathbb{B} = [b, \vec{b}]$$

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = [ab - \vec{a}\cdot\vec{b},\ a\vec{b} + b\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}]$$

nahe.

Hintereinanderausführung zweier Drehungen



Wir drehen die Kugel mit $D_{\boldsymbol{a},\alpha}$ um $\boldsymbol{a}$ mit dem Winkel $\alpha = \frac{\pi}{4}$, anschließend mit $D_{\boldsymbol{b},\beta}$ um $\boldsymbol{b}$ mit dem Winkel $\beta = \frac{\pi}{5}$, so dass A in A' und A' in A'' übergehen. Es gibt offensichtlich eine Drehung $D_{\boldsymbol{c},\gamma}$ um $\boldsymbol{c}$ mit $A \to A''$.

Jedoch ist keineswegs ersichtlich, dass $D_{\boldsymbol{c},\gamma}$ die anderen beiden Drehungen ersetzt.
Nun ja, es wurde bewiesen.

$$
\begin{array}{r|rcl}
D_{\boldsymbol{a},\alpha} & \mathbb{A} & = & \cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\,\mathbf{k} \\
D_{\boldsymbol{b},\beta} & \mathbb{B} & = & \cos\frac{\pi}{10} + \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})\sin\frac{\pi}{10} \\
D_{\boldsymbol{c},\gamma} & \mathbb{B}\mathbb{A} & = & \cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{6}}\Big[\big(\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{8} - 2\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{8}\big)\,\mathbf{i} - \\
 & & & \qquad \big(2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{8}\big)\,\mathbf{j} + \big(\sqrt{6}\cos\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{8}\big)\,\mathbf{k}\Big] \\
 & \gamma & = & 2\arccos\big(\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{8}\big) \approx 44{,}07^\circ
\end{array}
$$

Zur Erinnerung:
Die Rotation um einen normierten Vektor $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ mit dem Winkel α
wird durch die Quaternion

$\mathbb{A} = \big(\cos\frac{\alpha}{2},\, x\sin\frac{\alpha}{2},\, y\sin\frac{\alpha}{2},\, z\sin\frac{\alpha}{2}\big) = \big(\cos\frac{\alpha}{2},\, (x,y,z)\sin\frac{\alpha}{2}\big) = \big(\cos\frac{\alpha}{2} + (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})\sin\frac{\alpha}{2}\big)$

erfasst.

Wegen $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ gilt $|\mathbb{A}| = 1$.

Quaternionen und Drehungen alternativ Coxeter 1946

$$\mathbb{A} = [a, \boldsymbol{a}], \quad \mathbb{B} = [b, \boldsymbol{b}]$$
$$\mathbb{AB} = [ab - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\ a\boldsymbol{a} + b\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]$$

1. $\mathbb{A}$ ist genau dann eine reine Einheitsquaternion, wenn $\mathbb{A}^2 = -1$ ist.

$$\begin{aligned}\mathbb{A} &= d + a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}\\ \mathbb{A}^2 &= -a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + 2d(a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

2. $\mathbb{A} = [0, \boldsymbol{a}]$ und $\mathbb{B} = [0, \boldsymbol{b}]$ reine Quaternionen, dann gilt: $\mathbb{A} \perp \mathbb{B} \iff \mathbb{AB} = -\mathbb{BA}$

$$\begin{aligned}\mathbb{AB} &= [-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\\ \mathbb{BA} &= [-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}]\\ -\mathbb{BA} &= [\ \ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}] \qquad |\ -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\end{aligned}$$
$$\mathbb{AB} = -\mathbb{BA} \iff -\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 \iff \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \iff \mathbb{A}\perp\mathbb{B}$$

3. $\mathbb{A} = [0, \boldsymbol{a}]$ und $\mathbb{B} = [0, \boldsymbol{b}]$ reine Quaternionen und $|\mathbb{A}| = 1$, dann gilt: $\mathbb{A} \perp \mathbb{B} \iff \mathbb{ABA} = \mathbb{B}$

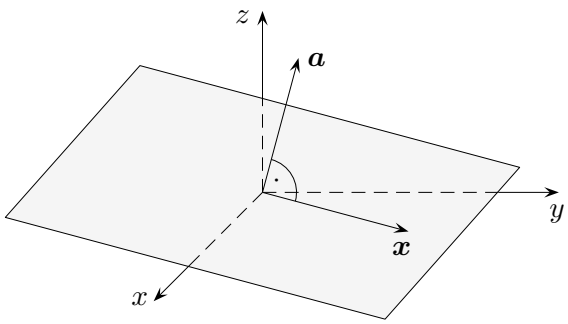
   $\mathbb{AB} = -\mathbb{BA} \quad |\,\mathbb{A} \quad$ 2. und 1.

4. Wir betrachten für $\mathbb{A} = [0, \boldsymbol{a}]$, $|A| = 1$ und $\mathbb{P} = [0, \boldsymbol{p}]$ die Transformation $\mathbb{P} \to \mathbb{P}' = \mathbb{APA}$.

   a) Es ist $\mathbb{P}' = [0, \boldsymbol{p'}]$ eine reine Quaternion mit $|\mathbb{P}'| = |\mathbb{P}|$.

$$\begin{aligned}\mathbb{APA} &= [0, \boldsymbol{a}][0, \boldsymbol{p}][0, \boldsymbol{a}]\\ &= [-\boldsymbol{ap}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p}][0, \boldsymbol{a}]\\ &= [-\underbrace{(a\times\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{a}}_{0},\ \ldots\,]\\ |\mathbb{APA}| &= |\mathbb{A}|\mathbb{P}|\mathbb{A}| = |\mathbb{P}|\end{aligned}$$

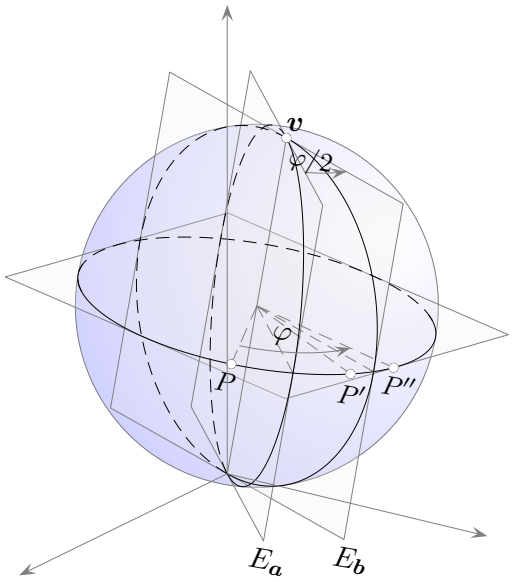
   b) Sei $E_{\boldsymbol{a}}$ die Ebene mit dem Normalenvektor $\boldsymbol{a}$ durch den Ursprung.
   Die Transformation ist eine Spiegelung des Raumes an der Ebene $E_{\boldsymbol{a}}$.



Jeder Punkt der Ebene bleibt fest und jeder zu $E_{\boldsymbol{a}}$ orthogonale Vektor $\lambda\boldsymbol{a}$ ändert seine Richtung. Die Transformation ist linear.

$\mathbb{A}[0, \boldsymbol{x}]\mathbb{A} = [0, \boldsymbol{x}] \quad |3.$

$\mathbb{A}[0, \lambda\boldsymbol{a}]\mathbb{A} = \lambda[0, \boldsymbol{a}][0, \boldsymbol{a}][0, \boldsymbol{a}] = -\lambda[0, \boldsymbol{a}] = [0, -\lambda\boldsymbol{a}] \quad |1.$



5. Die Drehung $D_{\boldsymbol{v},\varphi}$ kann als Doppelspiegelung an zwei Ebenen dargestellt werden, die sich unter einem Winkel von $\varphi/2$ schneiden. $\boldsymbol{v} = (\ell, m, n)$ ist der Einheitsvektor entlang der Schnittgeraden.

   $\mathbb{P} \to \mathbb{P}'' = (\mathbb{B}\mathbb{A})\mathbb{P}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = (-\mathbb{B}\mathbb{A})\mathbb{P}(-(\mathbb{B}\mathbb{A})^*) \quad | \; \mathbb{A}\mathbb{B} = (\mathbb{B}\mathbb{A})^*$ siehe unter 2.

6. $-\mathbb{B}\mathbb{A} = [\cos\frac{\varphi}{2}, \boldsymbol{v}\sin\frac{\varphi}{2}] = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathbb{V}\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \mathbb{V} = \ell\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$

$$\begin{aligned} -\mathbb{B}\mathbb{A} &= [\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}] \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= \cos\tfrac{\varphi}{2} && | \;\; |\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 1 \\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{v}\sin\tfrac{\varphi}{2} && | \;\; |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \sin\tfrac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

zusammengefasst

Drehung $D_{\boldsymbol{v},\varphi}$ $\quad \mathbb{P} \to \mathbb{P}'' = \mathbb{R}\mathbb{P}\mathbb{R}^*, \quad \mathbb{R} = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathbb{V}\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \mathbb{V} = \ell\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}, \quad |\mathbb{V}| = 1$

$\mathbb{R}^* = \cos\frac{\varphi}{2} - \mathbb{V}\sin\frac{\varphi}{2}$

$\mathbb{R}$ konjugiert, statt φ wird $-\varphi$ eingesetzt, $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$

Matrixdarstellung von Quaternionen siehe Möbiustransformation
Startseite