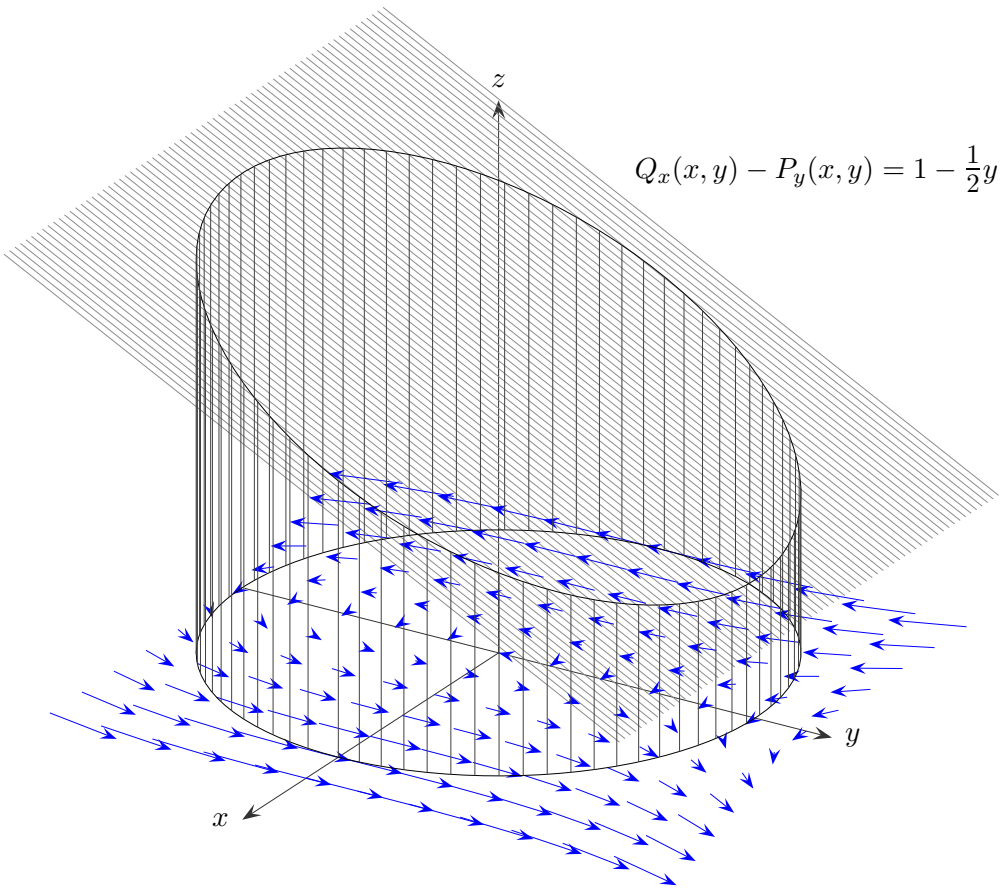
Satz von Green



Der Satz von Green (1828) stellt einen Zusammenhang zwischen einem Wegintegral längs einer geschlossenen Kurve L und einem Integral über die eingeschlossene Fläche G (Rand $L = \partial G$) her:

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_G \big(\,Q_x(x,y) - P_y(x,y)\big)\;dx\,dy$$

Die rechte Seite ist der Inhalt eines Volumens (hier ein halber Zylinder der Höhe 2).
Die Grafik soll die erstaunliche Aussage des Satzes lediglich veranschaulichen.

Gegeben ist ein Vektorfeld $\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}y^2 \\ x \end{pmatrix}$ (Die Vektoren wurden mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ gestaucht.)

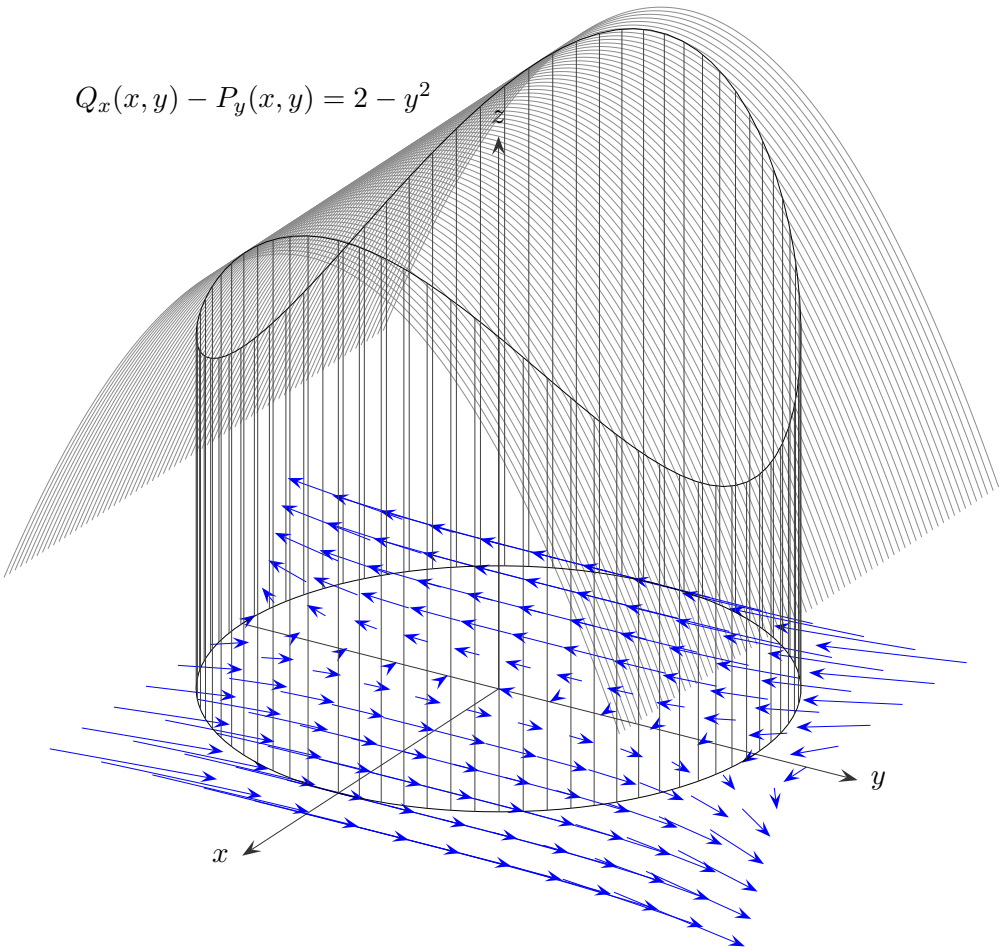
und eine Kurve L in Parameterdarstellung (Kreis) $\big(\cos(t), \sin(t)\big)^{\mathrm{T}}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_0^{2\pi} \big[-\frac{1}{4}\sin^3(t) + \cos^2(t)\big]\,dt = \ldots = \pi$$

$$\iint_G \big(\,Q_x(x,y) - P_y(x,y)\big)\;dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \big[1 - \frac{1}{2}y\big]\;dy\,dx = \ldots = \pi$$

© Roolfs

Satz von Green



$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_G \big(\,Q_x(x,y) - P_y(x,y)\big)\;dx\,dy$$

Die rechte Seite ist der Inhalt eines Volumens.

Gegeben ist ein Vektorfeld $\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}y^3 \\ 2x \end{pmatrix}$ (Die Vektoren wurden mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ gestaucht.)

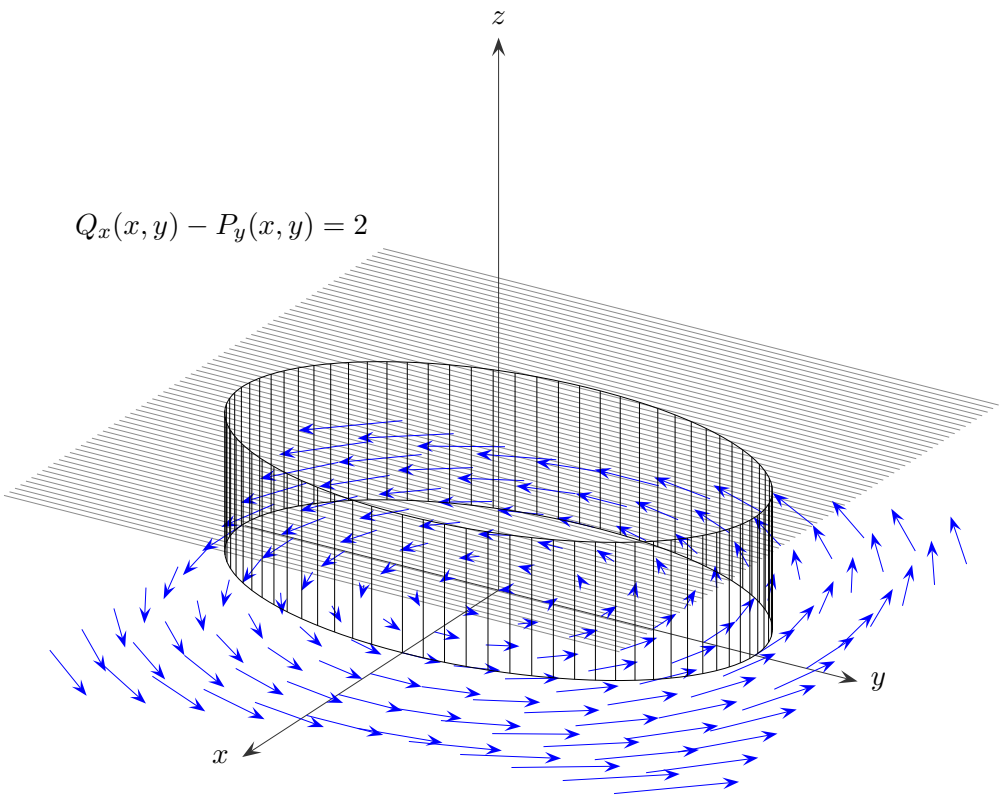
und eine Kurve L in Parameterdarstellung (Kreis) $\big(\cos(t), \sin(t)\big)^{\mathrm{T}}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_0^{2\pi} \big[-\frac{1}{3}\sin^4(t) + 2\cos^2(t)\big]\,dt = \ldots = \frac{7}{4}\pi$$

$$\iint_G \big(\,Q_x(x,y) - P_y(x,y)\big)\;dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \big[2 - y^2\big]\,dy\,dx = \ldots = \frac{7}{4}\pi$$

© Roolfs

Flächenberechnung mit dem Satz von Green



$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_G \big(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\big)\,dx\,dy$$

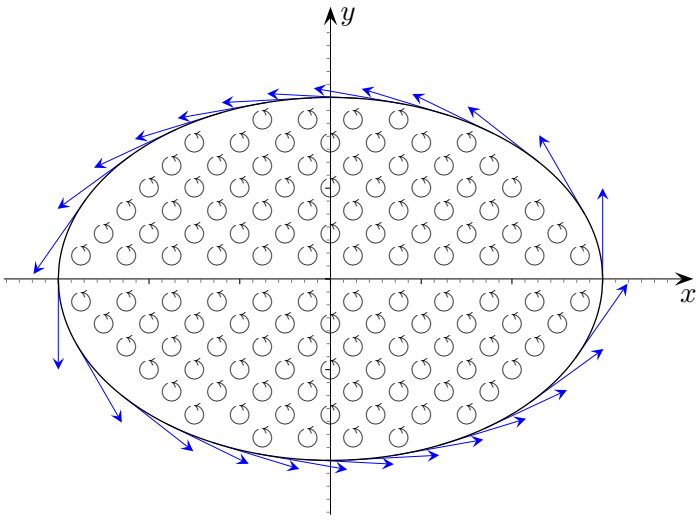
Das Vektorfeld sei: $\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$$\oint_L -y\,dx + x\,dy = \iint_G 2\,dx\,dy \qquad \text{doppelte Fläche von } G$$

Die Ellipse hat die Parameterdarstellung $(a\cos t, b\sin t)^{\mathrm{T}}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

$$A = \frac{1}{2}\oint_L -y\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[(-b\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t)(b\cos t)\right]\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

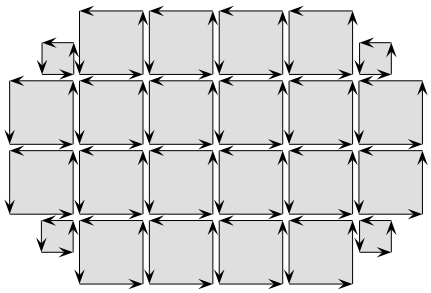
Anschauung



$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint \big(\, Q_x(x,y) - P_y(x,y)\big)\; dx\,dy$$

Fassen wir das Vektorfeld $\overrightarrow{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)^{\mathrm{T}}$
als Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit auf.
Das Wegintegral (links) ist ein Maß für die Umströmung der Kurve L (Zirkulation).

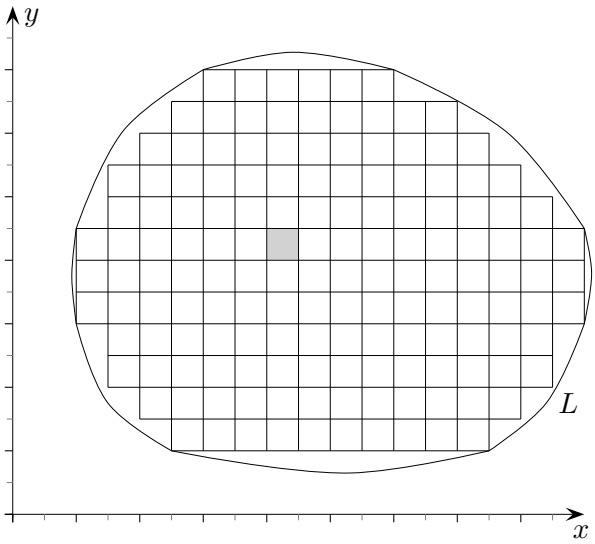
$Q_x(x,y) - P_y(x,y)$ ist die Wirbeldichte der Strömung und ein Maß für die Drehgeschwindigkeit eines mitschwimmenden Körpers. Die Wirbeldichte wird für jeden Punkt mit Zirkulation/Fläche (Grenzwert) ermittelt.
Im Doppelintegral (rechts) heben sich die Verwirbelungen innerhalb der Fläche auf (siehe Grafik).
Übrig bleibt die Zirkulation über den Rand.



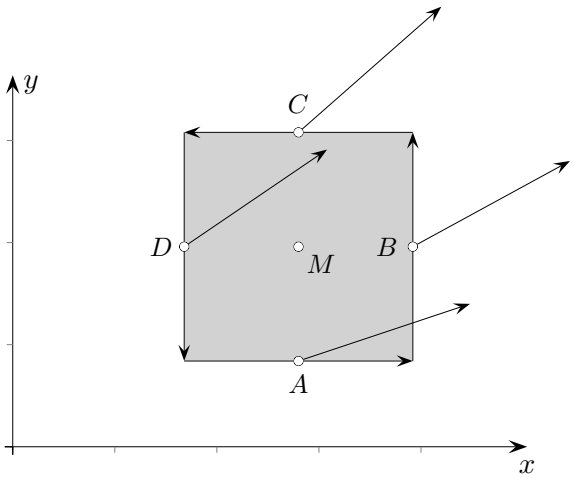
Greensche Integralformel

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_G \Big(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\Big)\,dx\,dy$$

Zur Begründung unterteilen wir das Gebiet G in Quadrate.



Für ein Quadrat gilt dann:



$$\begin{pmatrix} P(A) \\ Q(A) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P(B) \\ Q(B) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ dy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P(C) \\ Q(C) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -dx \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P(D) \\ Q(D) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -dy \end{pmatrix} =$$

$$\Big(Q(B) - Q(D)\Big)\,dy \;-\; \Big(P(C) - P(A)\Big)\,dx \;=\; Q_x(M)\,dx\,dy \;-\; P_y(M)\,dx\,dy \;=\; \Big(Q_x(M) - P_y(M)\Big)\,dx\,dy$$

Bei der Summation über alle Quadrate ist zu beachten, dass sich die Arbeit an gemeinsamen Quadratseiten wegen der entgegengesetzten Orientierung aufhebt und nur das Kurvenintegral über den Gebietsrand übrigbleibt, wenn wir die Quadrate schrumpfen lassen.
Dieses Kurvenintegral ist andererseits das obige Doppelintegral.

© Roolfs