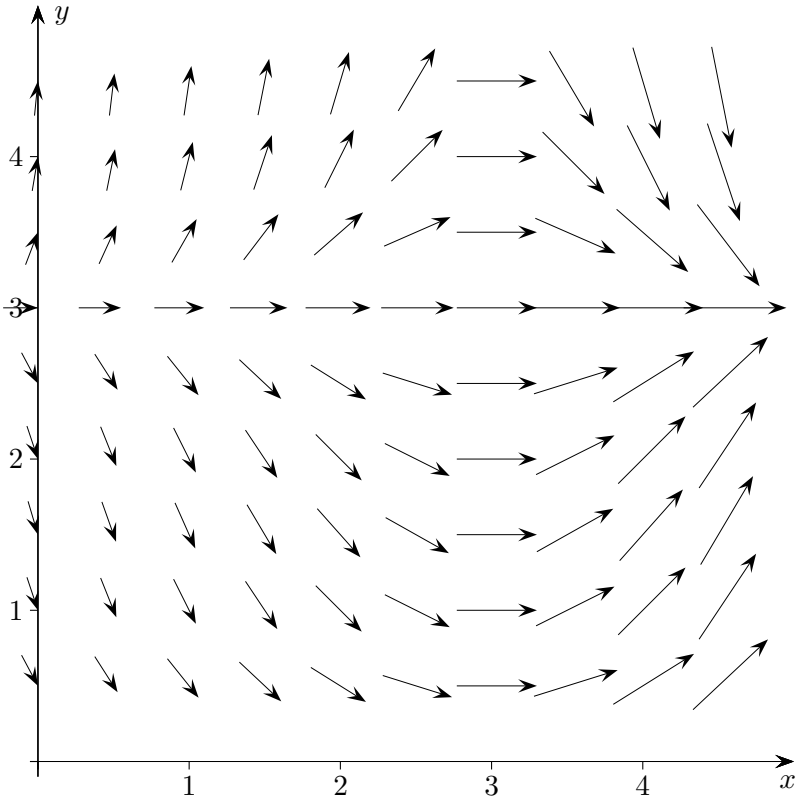
1. Vektorfelder
2. Wegintegral mehrere Seiten
3. Wegunabhängigkeit
4. Stammfunktion
5. Geschlossener Weg
6. Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$
7. Wegintegral im $\mathbb{R}^3$
8. Gradientenfeld
9. Wegintegral
10. Anschauung
11. Zirkulation
12. Wegintegral
13. Potentialfunktion
14. Helmholtz-Zerlegung
15. Rotation
16. Divergenz und Rotation
17. Rotation

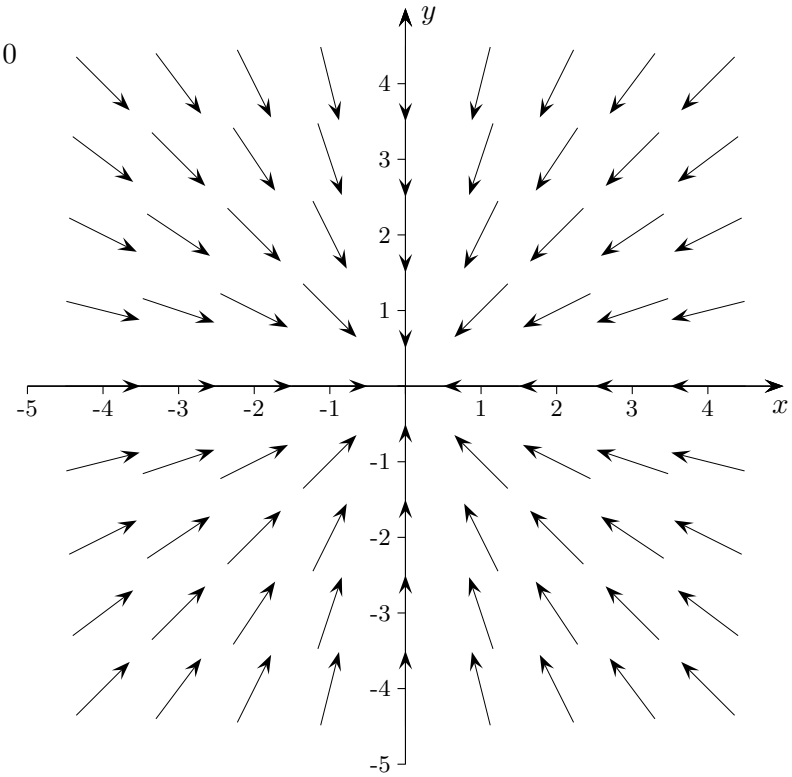
↑ Vektorfelder

Die Divergenz beschreibt Quellen und Senken eines Vektorfeldes, $\operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$.



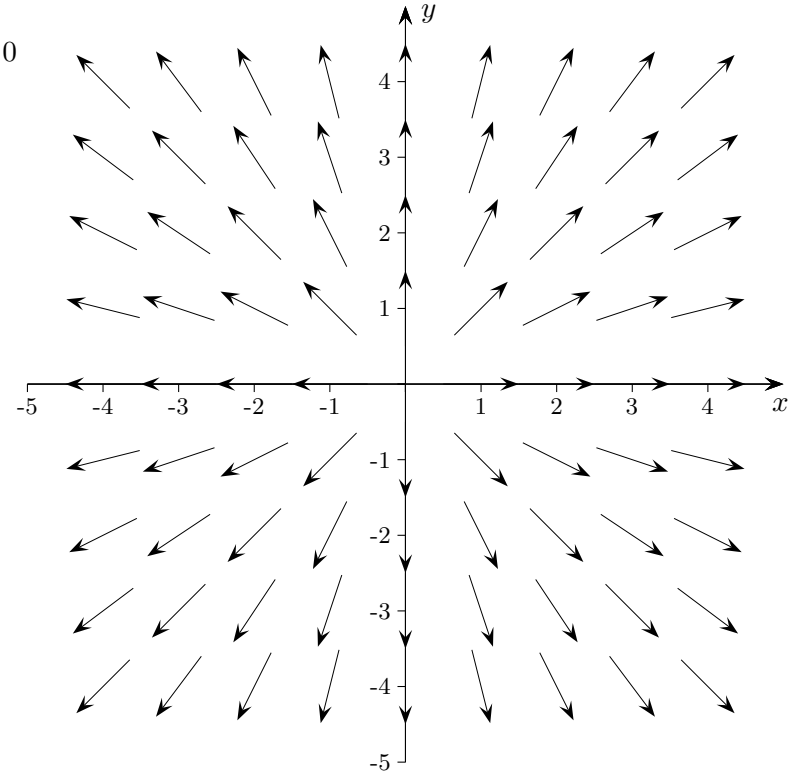
Senke

$\operatorname{div} A < 0$

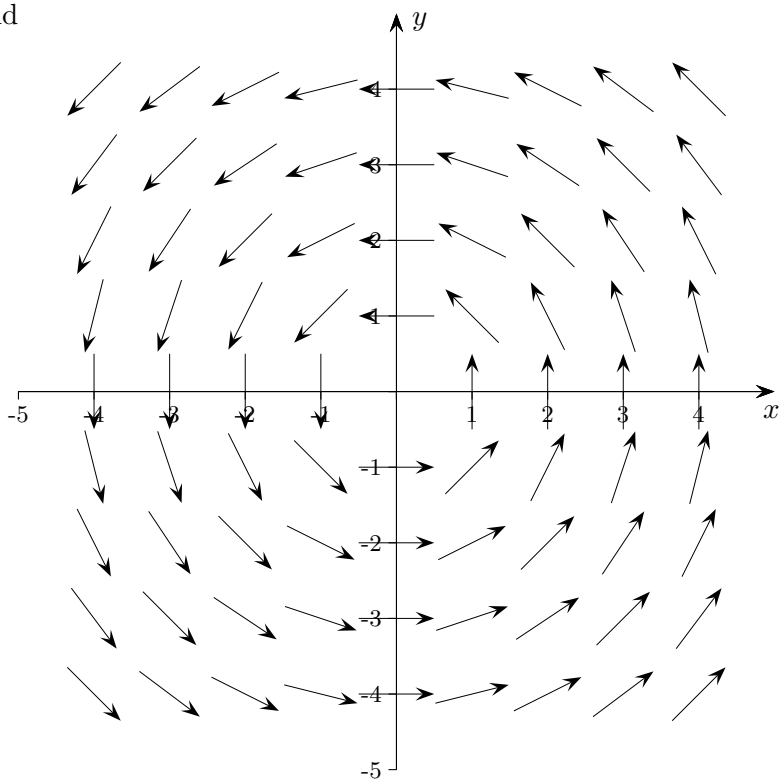


Quelle

$\operatorname{div} A > 0$

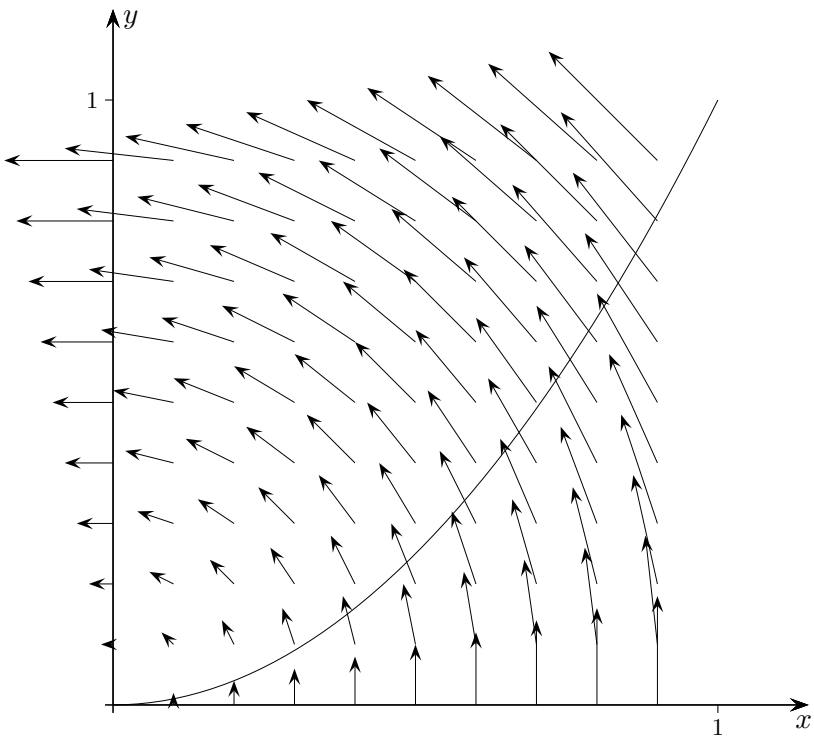


Wirbelfeld



Die Rotation eines Strömungsfeldes gibt für jeden Ort die doppelte Winkelgeschwindigkeit an, mit der sich ein mitschwimmender Körper dreht (rotiert).

↑ Wegintegral



$$\begin{aligned}\int_C f(x,y) &= \int_{t_0}^{t_1} f(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} r(t)\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \big[f_1(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + f_2(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \big]\, dt\end{aligned}$$

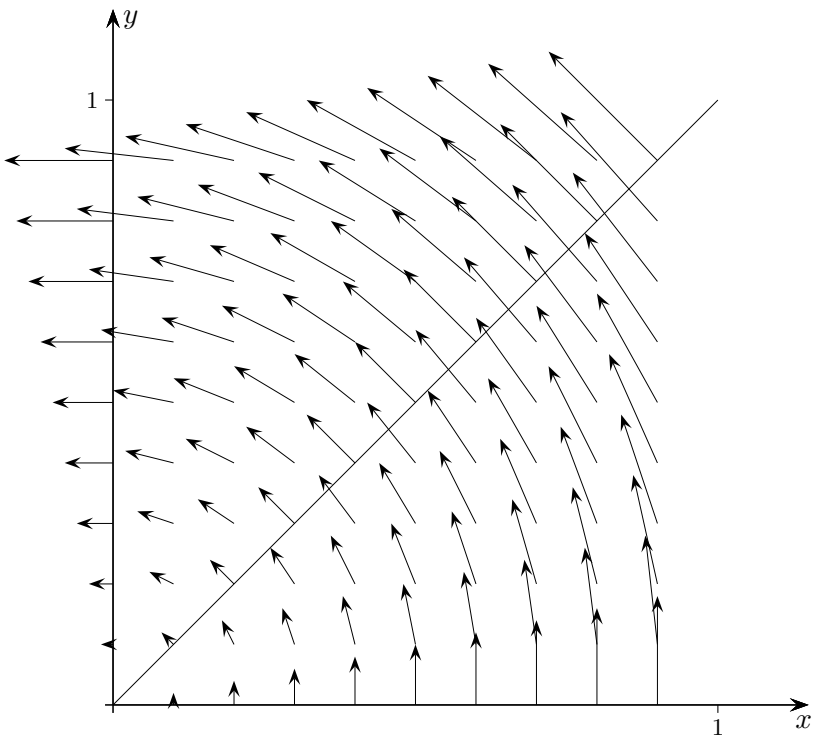
$$r(t) = \big(x(t), y(t)\big)^{\mathrm{T}} \qquad t_0 \le t \le t_1$$

$f(x,y) = \frac{1}{5}(-y, x)^{\mathrm{T}}$

$r(t) = (t, t^2)^{\mathrm{T}} \qquad 0 \le t \le 1$

$$\int_C f(x,y) = \frac{1}{5} \int_0^1 \big[-t^2 \cdot 1 + t \cdot 2t \big]\, dt = \frac{1}{15}$$

↑ Wegintegral



$$\begin{aligned}\int_C f(x,y) &= \int_{t_0}^{t_1} f(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} r(t)\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \big[f_1(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + f_2(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \big]\, dt\end{aligned}$$

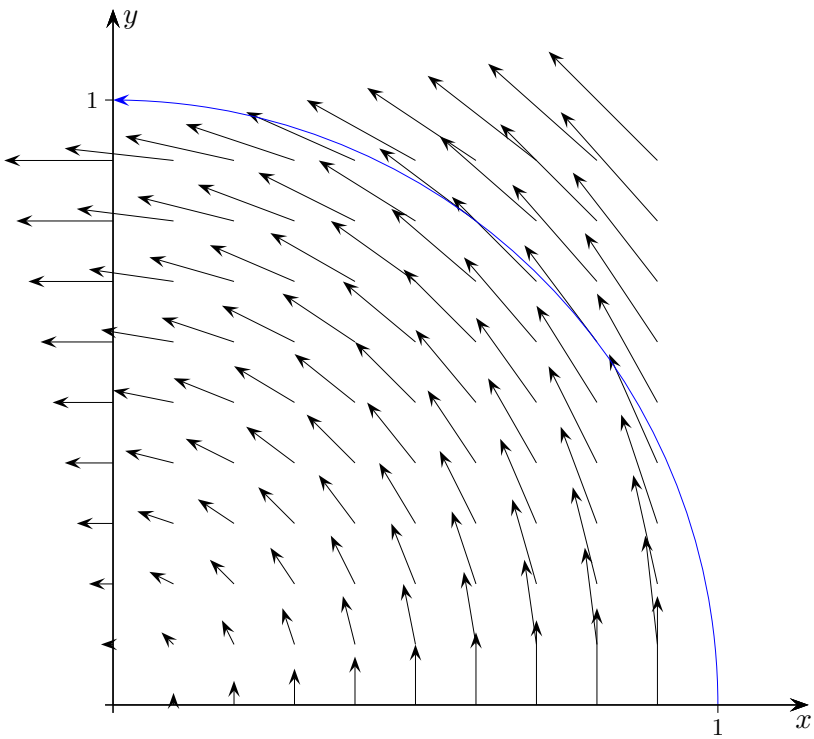
$$r(t) = \big(x(t), y(t)\big)^{\mathrm{T}} \qquad t_0 \le t \le t_1$$

$f(x,y) = \frac{1}{5}(-y, x)^{\mathrm{T}}$

$r(t) = (t, t)^{\mathrm{T}} \qquad 0 \le t \le 1$

$$\int_C f(x,y) = \frac{1}{5} \int_0^1 \big[-t \cdot 1 + t \cdot 1 \big]\, dt = 0$$

↑ Wegintegral



$$\begin{aligned}\int_C f(x,y) &= \int_{t_0}^{t_1} f(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} r(t)\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \big[f_1(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + f_2(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \big]\, dt\end{aligned}$$

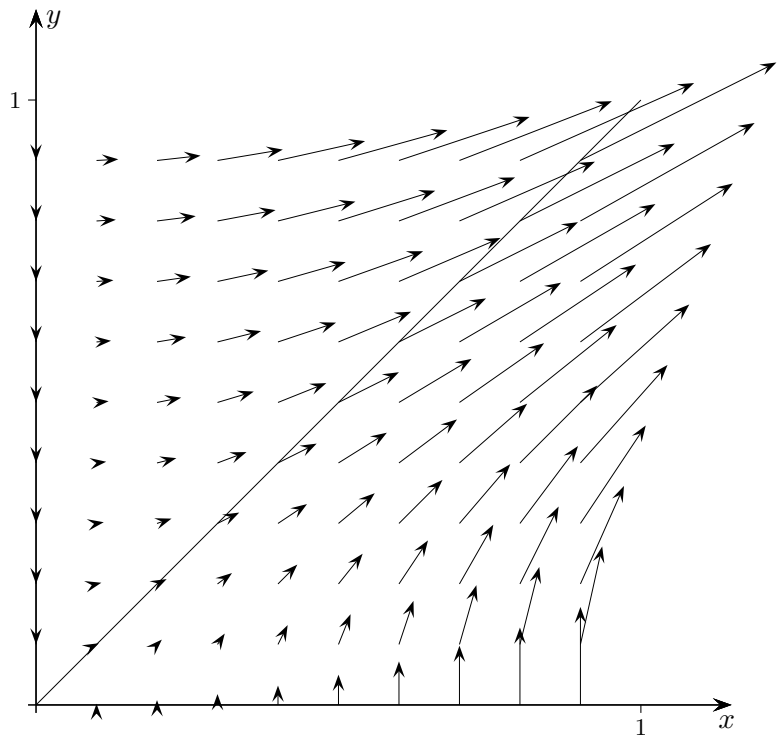
$$r(t) = \big(x(t), y(t)\big)^{\mathrm{T}} \qquad t_0 \le t \le t_1$$

$$f(x,y) = \frac{1}{5}(-y, x)^{\mathrm{T}}$$

$$r(t) = (\cos(t), \sin(t))^{\mathrm{T}} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$\int_C f(x,y) = \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big[\underbrace{\sin^2(t) + \cos^2(t)}_{1} \big]\, dt = \frac{\pi}{10}$$

↑ Wegunabhängigkeit



$$\begin{aligned}\int_C f(x,y) &= \int_{t_0}^{t_1} f(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} r(t)\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \big[f_1(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + f_2(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \big]\, dt\end{aligned}$$

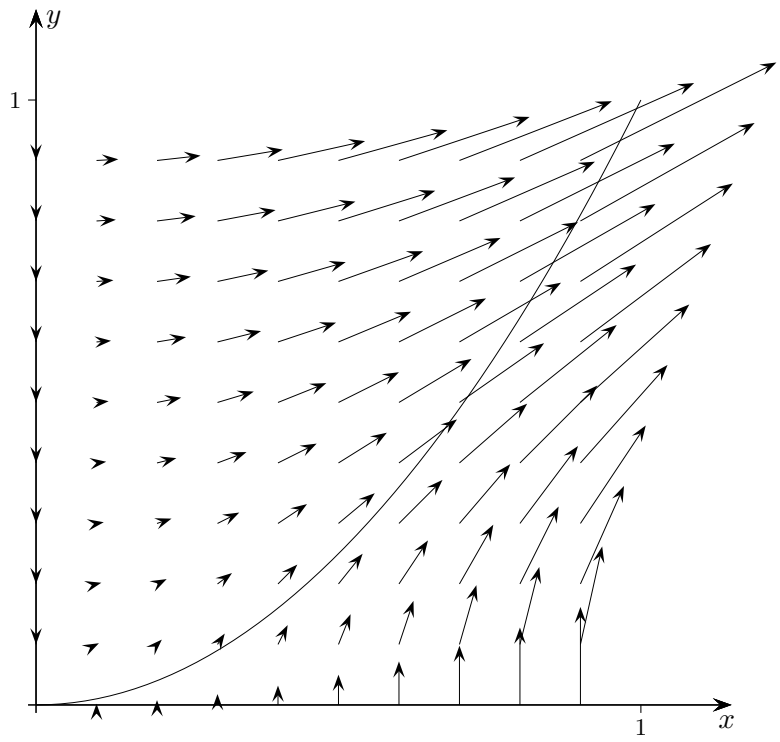
$$r(t) = \big(x(t), y(t)\big)^{\mathrm{T}} \qquad t_0 \le t \le t_1$$

$f(x,y) = \frac{1}{5}(2xy, x^2)^{\mathrm{T}}$

$r(t) = (t,t)^{\mathrm{T}} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$\int_C f(x,y) = \frac{1}{5} \int_0^1 \big[2t^2 + t^2 \big]\, dt = \frac{1}{5}$$

↑ Wegunabhängigkeit



$$\begin{aligned}\int_C f(x,y) &= \int_{t_0}^{t_1} f(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} r(t)\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \big[f_1(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + f_2(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \big]\, dt\end{aligned}$$

$$r(t) = \big(x(t), y(t)\big)^{\mathrm{T}} \qquad t_0 \le t \le t_1$$

$f(x,y) = \frac{1}{5}(2xy, x^2)^{\mathrm{T}}$

$r(t) = (t, t^2)^{\mathrm{T}} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\int_C f(x,y) &= \frac{1}{5} \int_0^1 \big[2t^3 + t^2 \cdot 2t \big]\, dt = \frac{1}{5} \qquad \text{oder mit der Stammfunktion } F(x,y) = \frac{1}{5} x^2 y \\ &= F(x(1), y(1)) - F(x(0), y(0)) = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

↑ Stammfunktion

$$\begin{aligned}
\int_C f(x,y) &= \int_{t_0}^{t_1} f(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} r(t)\, dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \left[f_1(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + f_2(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \right] dt \\
&= F(x(t_1), y(t_1)) - F(x(t_0), y(t_0))
\end{aligned}$$

$$r(t) = \big(x(t), y(t)\big)^{\mathrm{T}} \qquad t_0 \le t \le t_1$$

Dass sich die Berechnung des Wegintegrals mit einer Stammfunktion so einfach gestaltet, liegt an der verallgemeinerten Kettenregel.

$$\frac{d}{dt} F(x(t), y(t)) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} F(x(t), y(t))}_{f_1(r(t))} \cdot \frac{d}{dt} x(t) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} F(x(t), y(t))}_{f_2(r(t))} \cdot \frac{d}{dt} y(t)$$

$$\underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \quad \dots \quad dt}_{F(x(t_1), y(t_1)) - F(x(t_0), y(t_0))} = \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \quad \dots \quad dt}_{\int_C f(x,y)}$$

Im Übrigen gilt, wenn eine Stammfunktion existiert:

$$F(x(t_1), y(t_1)) = F(x(t_0), y(t_0)) + \int_C f(x,y)$$

Mit Hilfe von Wegintegralen kann die Stammfunktion ermittelt werden.

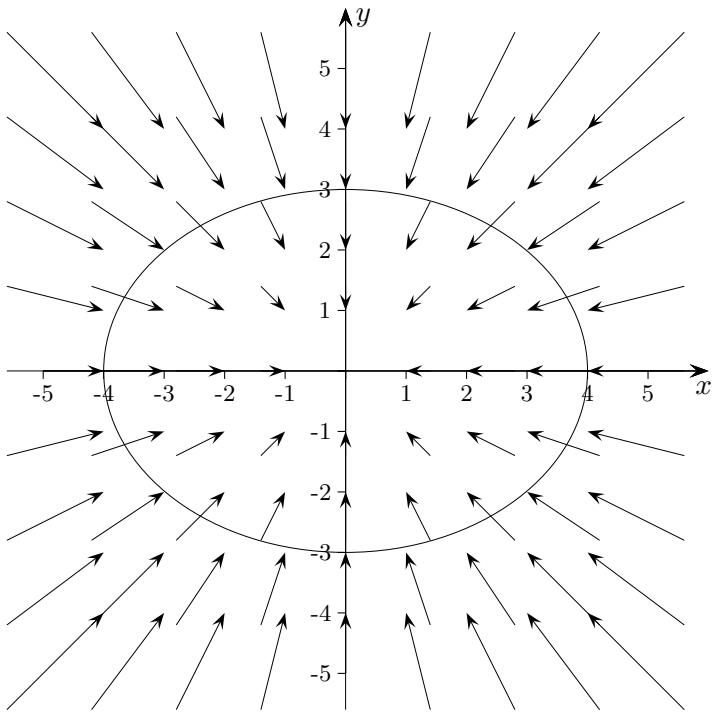
$$\oint_C f(x,y) = 0$$

C ist eine geschlossene Kurve.

Ein Vektorfeld heißt konservativ, wenn es eine Stammfunktion besitzt.
Das Vektorfeld ist dann ein Gradientenfeld.
Die Rotation ist null.

Besitzen die Komponenten eines Feldes stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G, dann ist das Feld in G genau dann konservativ, wenn die Rotation null ist.

↑ Geschlossener Weg



$$\begin{aligned}\int_C f(x,y) &= \int_{t_0}^{t_1} f(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} r(t)\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \big[f_1(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + f_2(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} y(t) \big]\, dt\end{aligned}$$

$$r(t) = \big(x(t), y(t)\big)^{\mathrm{T}} \qquad t_0 \le t \le t_1$$

$$f(x,y) = -\frac{1}{5}(x,y)^{\mathrm{T}}$$

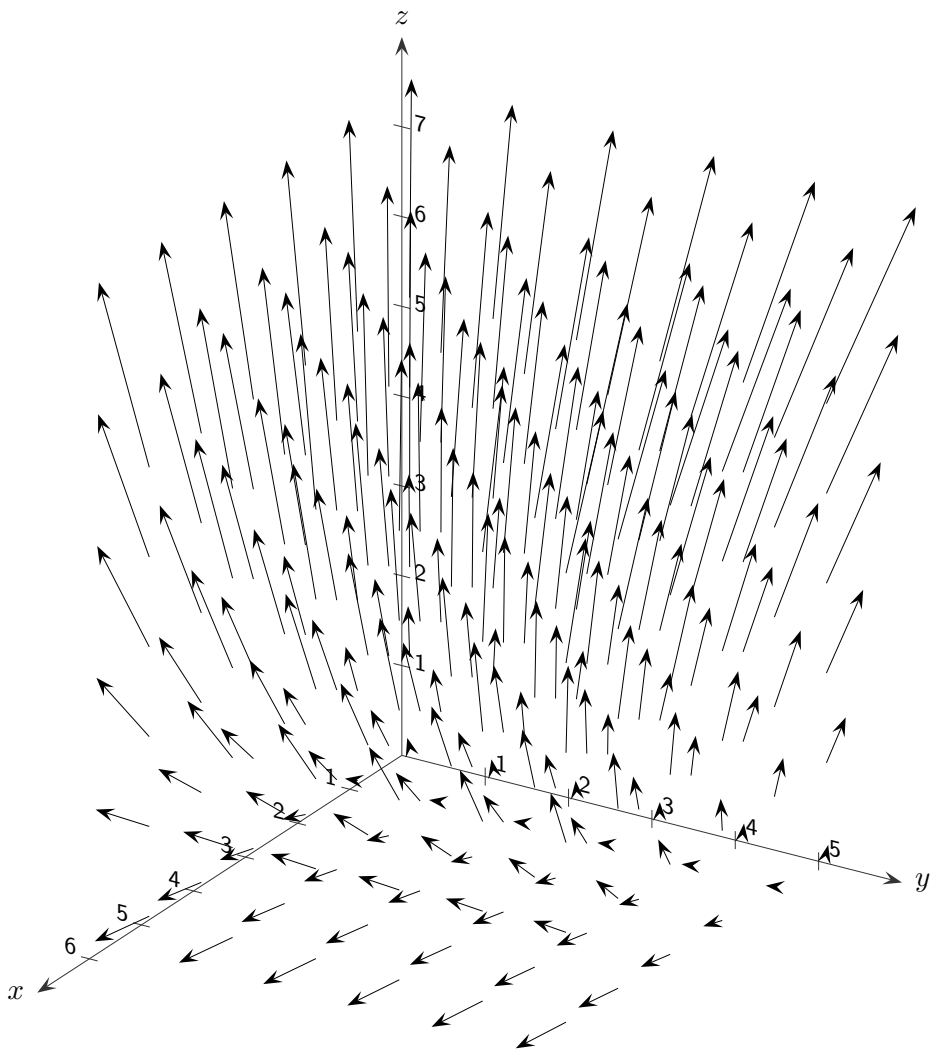
$$r(t) = (4\cos(t), 3\sin(t))^{\mathrm{T}} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\int_C f(x,y) = -\frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \big[-16\sin(t)\cos(t) + 9\sin(t)\cos(t) \big]\, dt = 0$$

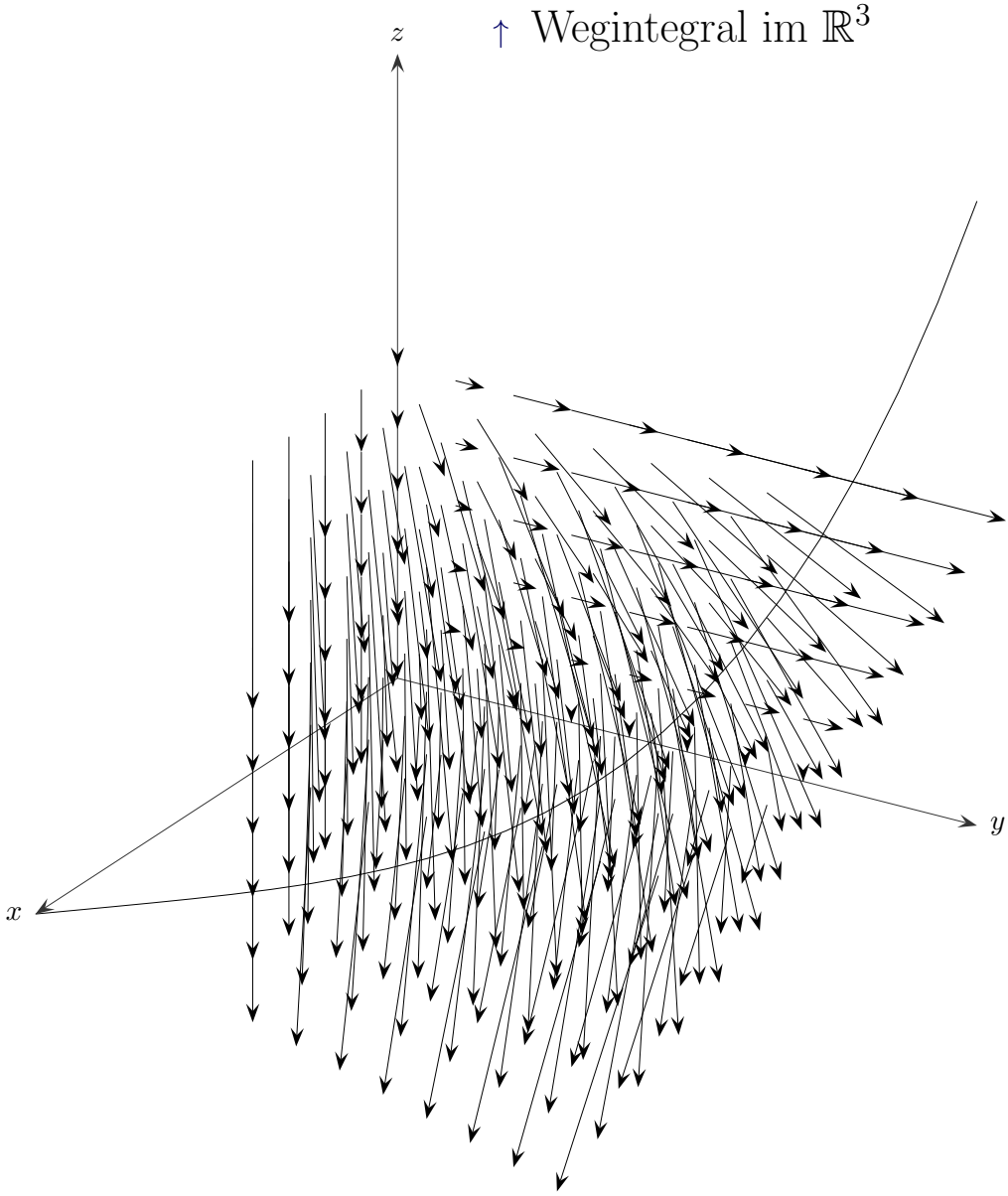
Stammfunktion $F(x,y) = -\frac{1}{10}(x^2 + y^2)$

$$\int_C f(x,y) = F(4,0) - F(4,0) = 0$$

↑ Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$



↑ Wegintegral im $\mathbb{R}^3$



$$\begin{aligned}\int_C f(x,y,z) &= \int_{t_0}^{t_1} f(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} r(t)\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \big[f_1(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + f_2(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} y(t) + f_3(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} z(t) \big]\, dt\end{aligned}$$

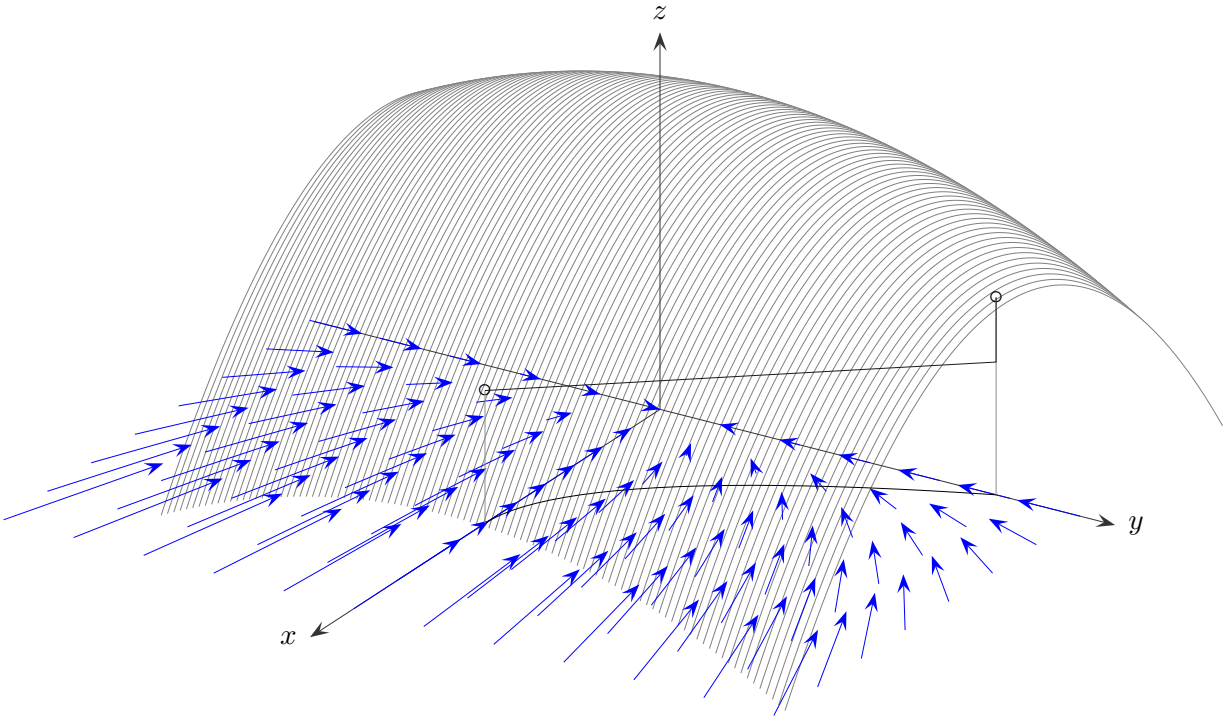
$$r(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)^{\mathrm{T}} \qquad t_0 \le t \le t_1$$

$f(x,y,z) = (xy, yz, -x)^{\mathrm{T}}$

$r(t) = (1-t, t, t^4)^{\mathrm{T}} \qquad 0 \le t \le 1$

$$\int_C f(x,y,z) = \int_0^1 \big[-(1-t)t + t^5 + 4(-1+t)t^3 \big]\, dt = -\frac{1}{5}$$

↑ Gradientenfeld



$$F(x,y) = 0{,}8 - 0{,}7x^2 - 0{,}3y^2$$

Die Vektoren des Gradientenfeldes

$$f(x,y) = -(1{,}4x, 0{,}6y)^{\mathrm{T}}$$

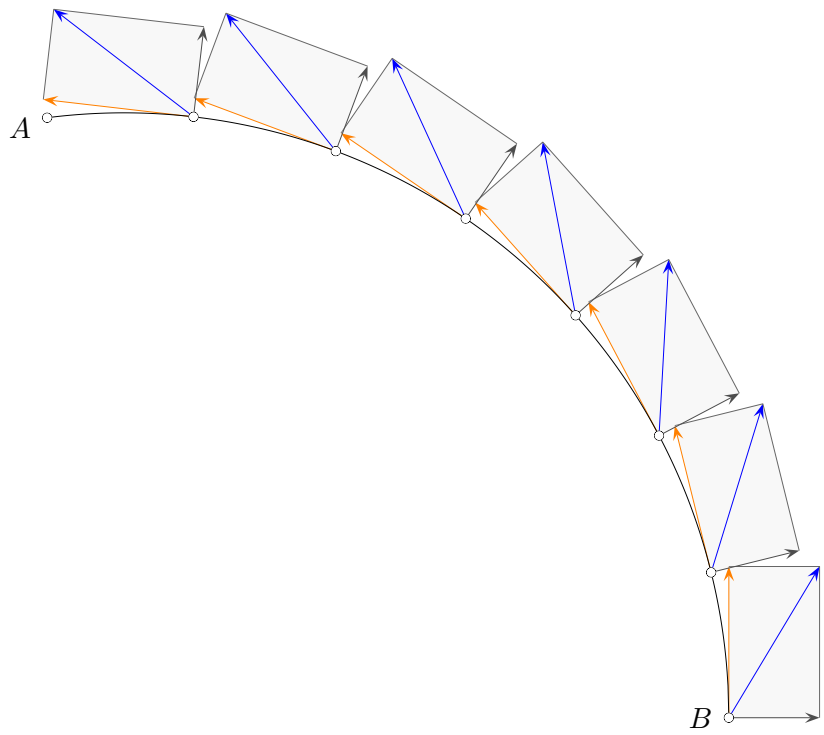
weisen stets in Richtung des stärksten Anstiegs. (Sie wurden mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ gestaucht.)

Zur Berechnung eines Wegintegrals

$$\int_C f(x,y) = F(\text{Endpunkt}) - F(\text{Anfangspunkt})$$

ist eine Funktionsdifferenz zu betrachten (wie im $\mathbb{R}^2$).

↑ Wegintegral



Gegeben ist ein Vektorfeld (blau)

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))^{\mathrm{T}}$$

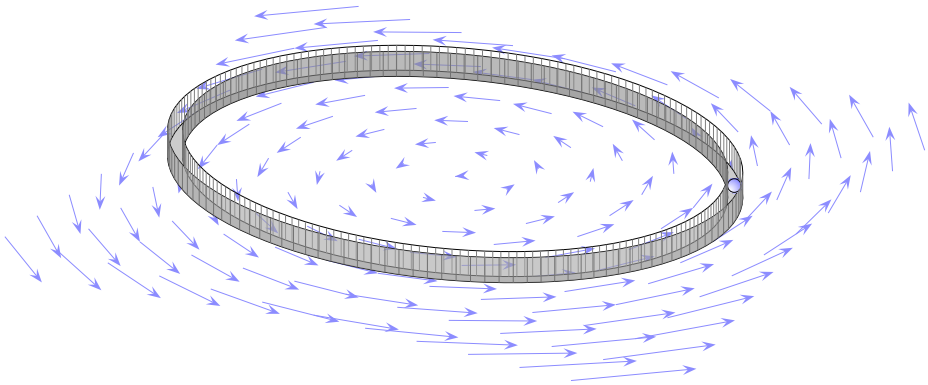
und eine Kurve C

$$r(t) = \big(x(t), y(t)\big)^{\mathrm{T}} \qquad t_0 \le t \le t_1$$

$$\begin{aligned}
\int_C f(x,y) &= \int_{t_0}^{t_1} f(r(t)) \cdot \frac{d}{dt} r(t)\, dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} f_1(x(t),y(t)) \\ f_2(x(t),y(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ \frac{d}{dt}y(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \big[f_1(r(t)) \cdot \frac{d}{dt}x(t) + f_2(r(t)) \cdot \frac{d}{dt}y(t) \big]\, dt
\end{aligned}$$

Das Skalarprodukt bewirkt, dass nur der tangentiale Anteil berücksichtigt wird,
beachte $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot \cos\alpha$.
Das Wegintegral misst z. B. die Arbeit, in einer Strömung von A nach B entlang C zu paddeln.

↑ Anschauung



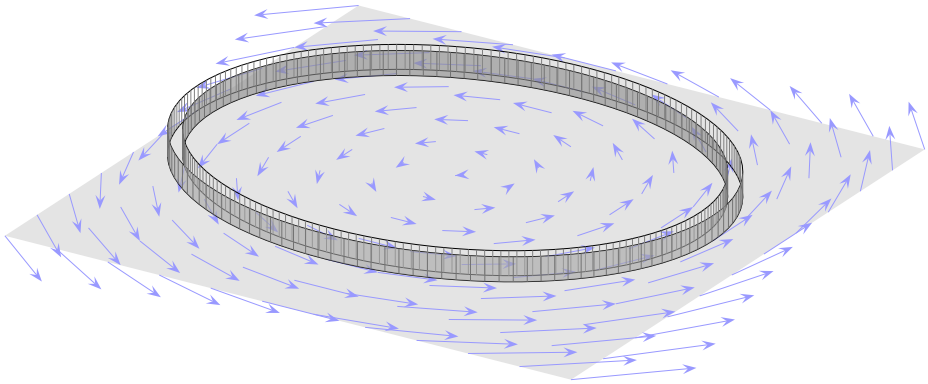
Wir geben einem Teilchen, das sich ruhend in der Bahn befindet, einen Impuls.
Ohne das Kraftfeld würde es reibungsfrei mit konstanter Geschwindigkeit in der Bahn umlaufen.
Die an das Teilchen angreifenden Kräfte bewirken jeweils eine Geschwindigkeitsänderung.
Hierbei kann das Teilchen beschleunigt oder abgebremst werden.
Nach einer Umrundung hat sich die Teilchenenergie um $\int_C f(x,y)$ geändert.
Aus

$$\frac{1}{2}mv^2_{\text{Anfang}} + \int_C f(x,y) = \frac{1}{2}mv^2_{\text{Ende}}$$

kann die Endgeschwindigkeit ermittelt werden.
Für diese Überlegung ist es nicht erforderlich, dass die Bahn geschlossen ist.

In einem konservativen Vektorfeld stimmen für alle geschlossenen Bahnen die Anfangs- und Endgeschwindigkeiten für eine Umrundung überein.

↑ Zirkulation



Das Vektorfeld sei nun das Geschwindigkeitsfeld einer über die Ebene fließenden Flüssigkeit.
Wir stellen uns vor, die Wände der schmalen Wasserbahn blitzartig in der Ebene zu platzieren.
Die Zirkulation $\oint_C f(x,y)$ ist dann die Geschwindigkeit, mit der die Flüssigkeit weiterhin (reibungsfrei) in der Bahn fließt (zirkuliert), multipliziert mit der Länge der Bahn.
In einer wirbelfreien Strömung verschwindet die Zirkulation für jeden geschlossenen Weg.
Genau die konservativen Vektorfelder sind wirbelfrei.

↑ Wegintegral

$$f(x,y,z) = (xy, yz, -x)^{\mathrm{T}}$$
$$r(t) = (1-t, t, t^4)^{\mathrm{T}} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\int_C f(x,y,z) = \int_0^1 \left[-(1-t)t + t^5 + 4(-1+t)t^3 \right] dt = -\frac{1}{5}$$

Maple

```
with(VectorCalculus):
with(LinearAlgebra):
f:=<x*y, y*z, -x>;
r:=<1-t,t,t^4>;
r1:=map(diff,r,t);
x:=r[1]:  y:=r[2]:  z:=r[3]:
DotProduct(f, r1) assuming t:: real;
int(%,t=0..1);
```

↑ Potentialfunktion

Untersuche, ob $f(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y)^{\mathrm{T}}$ ein Gradientenfeld ist.

Maple

```
with(VectorCalculus):
f:= VectorField(<2*x*y*z, x^2*z, x^2*y>, 'cartesian'[x,y,z]);
Curl(f);                    # notw. Bed. rot f = 0⃗
F:=ScalarPotential(f);
Gradient(F, [x,y,z]);       # mögliche Kontrolle
```

$$F(x,y,z) = x^2yz$$

Auf einfach zusammenhängenden Gebieten sind genau
die wirbelfreien (rot $f = \vec{0}$) Vektorfelder Gradientenfelder.

↑ Helmholtz-Zerlegung

Ein Vektorfeld $\overrightarrow{V}$ kann (unter schwachen Voraussetzungen) in einen wirbel- und einen quellenfreien Anteil zerlegt werden.

$$\overrightarrow{V} = \operatorname{grad}\phi + \operatorname{rot}\overrightarrow{H},$$

wobei ϕ ein Skalarfeld und $\overrightarrow{H}$ ein Vektorfeld sind.
Falls es eine solche Darstellung gibt, dann führt die Divergenzbildung zu $\operatorname{div}\overrightarrow{V} = \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi$, da $\operatorname{div}\operatorname{rot}\overrightarrow{H} = 0$ ist. Die Gleichung $\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = \operatorname{div}\overrightarrow{V}$ stellt für ein gegebenes Vektorfeld $\overrightarrow{V}$ eine partielle Differenzialgleichung dar, deren Lösung in einfachen Fällen unmittelbar erkannt werden kann. Für den 2. Summanden gilt

$$\overrightarrow{V} = \operatorname{grad}\phi + \overrightarrow{V_2},$$

also $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V} - \operatorname{grad}\phi \qquad$ mit $\quad \operatorname{div}\overrightarrow{V_2} = \operatorname{div}\overrightarrow{V} - \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = 0.$

Zu $\overrightarrow{V_2}$ gibt es ein Vektorpotential $\overrightarrow{H}$ mit $\overrightarrow{V_2} = \operatorname{rot}\overrightarrow{H}$.

Zerlege $\overrightarrow{V} = (x^2, z, y)^{\mathrm{T}}$.

Maple

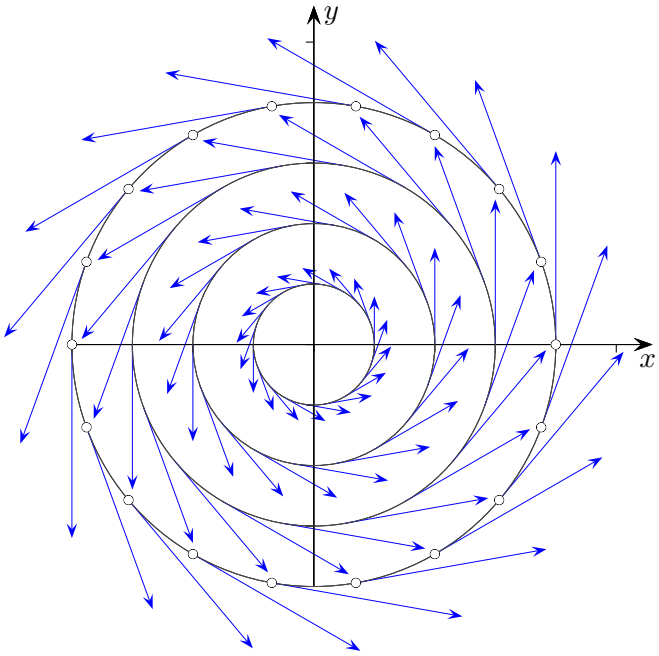
```
restart:
interface(warnlevel=0):
with(VectorCalculus):
with(PDEtools):

V:= VectorField(<x^2, z, y>, 'cartesian'[x,y,z]);
beta:= Divergence(V);
phi:= diff(u(x,y,z),x,x)+diff(u(x,y,z),y,x)+diff(u(x,y,z),z,z)=beta;
pdsolve(phi);
V1:=Gradient((1/3*x^3),[x,y,z]);                    # kann auch gesehen werden
Div1:=Divergence(V1);                                # mögliche Kontrolle
V2:=V-V1;
Div2:=Divergence(V2);                                # mögliche Kontrolle
H:=VectorPotential(V2);
V2:=Curl(H);                                         # mögliche Kontrolle
```

$$\operatorname{div}\overrightarrow{V} = 2x$$

$$\overrightarrow{V} = (x^2, z, y)^{\mathrm{T}} = \underbrace{\operatorname{grad}\frac{1}{3}x^3}_{(x^2,0,0)^{\mathrm{T}}} + (0, z, y)^{\mathrm{T}} = \operatorname{grad}\frac{1}{3}x^3 + \operatorname{rot}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{y^2}{2}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$$

↑ Rotation



Wir betrachten die Drehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse, $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Geschwindigkeit beträgt

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \sin(\omega t) \\ \omega \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y(t) \\ \omega x(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\perp \text{ zum Ortsvektor, in der Grafik } \omega = 0{,}8)$$

und kann als Vektorfeld dargestellt werden (z. B. als Strömungsfeld einer Flüssigkeit)

$$f(x, y, z) = (-\omega y, \omega x, 0)^{\mathrm{T}}.$$

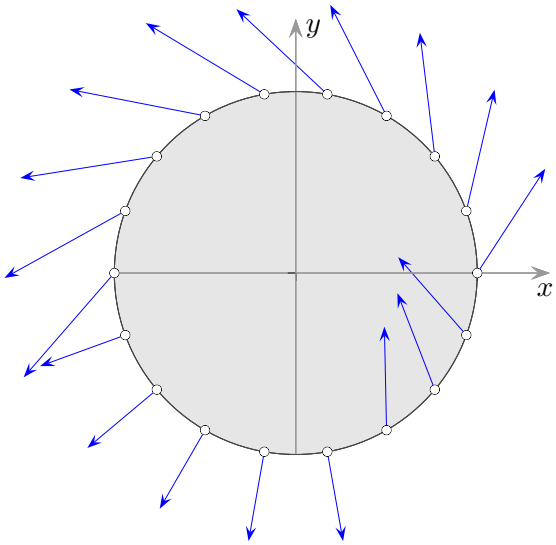
Die Zirkulation für einen Kreis $r(t) = (r\cos(t), r\sin(t), 0)^{\mathrm{T}}$, $0 \le t \le 2\pi$, beträgt

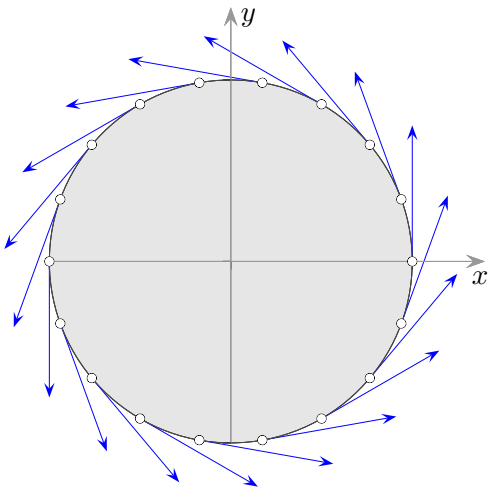
$$\int_C f(x, y, z) = \ldots = \omega r^2 \int_0^{2\pi} [\, \underbrace{\sin^2(t) + \cos^2(t)}_{1} \,]\, dt = 2\omega\pi r^2$$

und für den Kreis mit dem Inhalt 1 damit $\displaystyle\int_C f(x, y, z) = 2\omega$.

Andererseits gilt auch $\operatorname{rot} f = (0, 0, 2\omega)^{\mathrm{T}}$.
Die Rotation von f beschreibt die Drehachse (z-Achse) und die doppelte Winkelgeschwindigkeit 2ω.

↑ Rotation





Die Zirkulation bestimmt die Drehwirkung.
Für ein beliebiges Vektorfeld und der Zirkulation $\int_C f = a$ (C Einheitskreis) existiert ein rotationssymmetrisches Vektorfeld mit der Zirkulation $a = 2\omega$.

Mit dem Satz von Green erhalten wir $\int_C f = \operatorname{rot} f \cdot \vec{n}^{\circ} = 2\omega$.

↑ Divergenz und Rotation

Der Nabla-Operator ∇

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ermöglicht kompakte Schreibweisen.

Gradient

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Der Gradient von $f(x,y,z)$ steht senkrecht auf der entsprechenden Niveaufläche von f.
Ferner zeigt der Gradient in die Richtung des stärksten Anstiegs und ist umso größer, je dichter die benachbarten Niveauflächen (Höhenlinien) liegen.
Falls ein Vektorfeld der Gradient eines Skalarfeldes ist, spricht man von einem konservativen (wirbelfreien) Vektorfeld, bzw. von einem Potentialfeld.

Divergenz (Maß für die Quellstärke)

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^{\mathrm{T}}$ ist ein Skalarfeld.

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \qquad \cdot \text{ symbolisches Skalarprodukt}$$

Mit der Divergenz werden Quellen und Senken erfasst.

$$\operatorname{div} \vec{v}\, dV = \sum \vec{v} \cdot \vec{n}^{\mathrm{o}}\, dA$$

dV Einheitswürfel, dA Seitenfläche

Rotation (engl. curl, Maß für die Wirbelstärke)

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \times \text{ symbolisches Vektorprodukt}$$

Mit der Rotation werden Wirbel beschrieben.
$\operatorname{rot} \vec{v}$ zeigt in Richtung des Drehvektors.
$|\operatorname{rot} \vec{v}|$ ist ein Maß für die Drehgeschwindigkeit.

$$\operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n}^{\mathrm{o}}\, dA = \sum_{\text{Rand}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

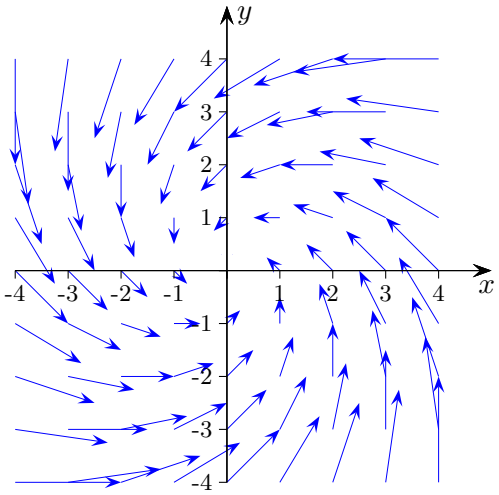
dA Einheitsquadrat

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$$
$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \vec{0}$$

↑ Divergenz und Rotation

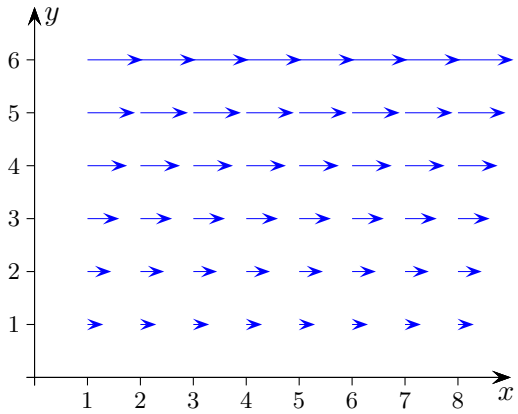
Vektorlängen wurden verringert.

$f(x,y,z) = (-x-y, x-y, 0)^{\mathrm{T}}$



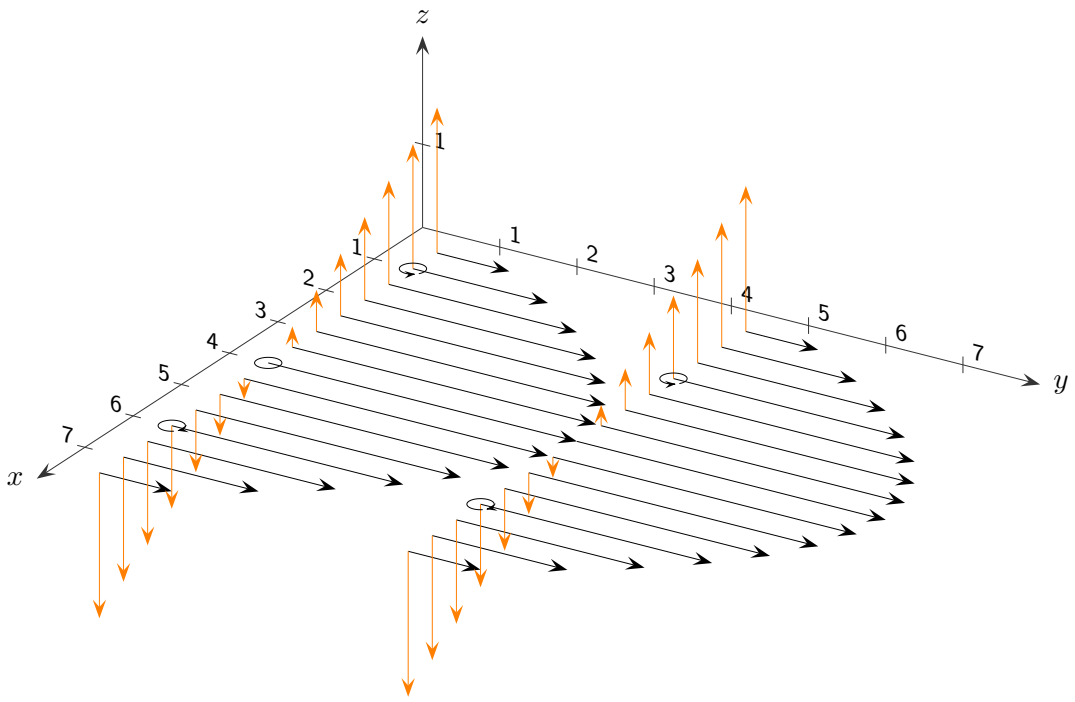
$\operatorname{div} f = -2$
$\operatorname{rot} f = (0,0,2)^{\mathrm{T}}$

$f(x,y,z) = (y, 0, 0)^{\mathrm{T}}$



$\operatorname{div} f = 0$
$\operatorname{rot} f = (0,0,-1)^{\mathrm{T}}$

↑ Rotation



Zu jedem Vektorfeld kann das Rotationsfeld (orange) ermittelt werden, hier:

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 - \frac{1}{4}(4-x)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{rot}\,\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 - \frac{x}{2} \end{pmatrix}$$

<u>Rotation</u> (engl. curl, Maß für die Wirbelstärke)

$$\text{rot}\,\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad \times \text{ symbolisches Vektorprodukt}$$

Das Vektorfeld $\vec{v}$ beschreibe die Geschwindigkeitsverteilung in einer ebenen strömenden Flüssigkeit. Lassen wir eine kleine Papierscheibe auf die Oberfläche fallen, so wird sie sich nicht nur mit der Flüssigkeit fortbewegen, sondern sie wird sich auch um ihren Mittelpunkt mit einer Winkelgeschwindigkeit ω drehen. $\text{rot}\,\vec{v}$ beschreibt die Lage der Drehachse. An anderer Stelle wird auch $|\,\text{rot}\,\vec{v}\,| = 2\omega$ nachgewiesen. Die Richtung des Rotationsvektors ist durch die Richtung der Drehung festgelegt (siehe Grafik).

Allgemein ist die Winkelgeschwindigkeit eines Scheibchens in einer fließenden Flüssigkeit maximal, falls es so platziert wird, dass sein Normalenvektor in Richtung des Rotationsvektors zeigt.

Startseite